

09. Уравнения

Блок 1. ФИПИ

Примеры решений

Задание 1. Найдите корень уравнения.

$1) \quad 7x+6=3x$ $7x-3x=-6$ $4x=-6 \quad :4$ $x=\frac{-6}{4}$ $x=-1,5$	$2) \quad 3+4x=9x-11$ $4x-9x=-11-3$ $-5x=-14 \quad :(-5)$ $x=\frac{-14}{-5}$ $x=2,8$	$3) \quad 2(x+5)=-9$ $2x+10=-9$ $2x=-9-10$ $2x=-19 \quad :2$ $x=-9,5$	<p style="text-align: right;"><i>или</i></p> $2(x+5)=-9 \quad :2$ $x+5=-4,5$ $x=-4,5-5$ $x=-9,5$
---	---	--	---

Ответ: $-1,5$

Ответ: $2,8$

Ответ: $-9,5$

Задание 2. Решите уравнение. Если уравнение имеет более одного корня, в ответ запишите меньший из корней.

$1) \quad x^2-1=0$ $x^2-1^2=0 \text{ – разность квадратов}$ $(x-1)(x+1)=0$ $x-1=0 \quad \text{или} \quad x+1=0$ $x=1 \quad \quad \quad x=-1$ <p style="text-align: center;"><i>меньший корень</i></p>	$2) \quad 9x^2=27x$ $9x^2-27x=0$ $9x(x-3)=0$ $9x=0 \quad :9 \quad \quad \quad \text{или} \quad x-3=0$ $x=0 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad x=3$ <p style="text-align: center;"><i>меньший корень</i></p>
---	---

Ответ: -1

Ответ: 0

Задание 3. Решите уравнение $x^2-196=0$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответ запишите больший из корней.

$$x^2-196=0$$

$$x^2-14^2=0 \text{ – разность квадратов}$$

$$(x-14)(x+14)=0$$

$$x-14=0 \quad \quad \quad x+14=0$$

$$x=14 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad x=-14$$

больший корень

Ответ: 14

Задание 4. Решите уравнение $x^2-3x-28=0$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответ запишите меньший из корней.

$$x^2-3x-28=0$$

$$a=1 \quad b=-3 \quad c=-28$$

$$D=b^2-4ac$$

$$D=(-3)^2-4 \cdot 1 \cdot (-28)=9+112=121$$

$$x_1=\frac{-(-3)+\sqrt{121}}{2 \cdot 1}=\frac{3+11}{2}=7$$

$$x_2=\frac{-(-3)-\sqrt{121}}{2 \cdot 1}=\frac{3-11}{2}=-4$$

меньший корень

Ответ: -4

Задание 5. Решите уравнение $x^2 - 6x - 16 = 0$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответ запишите больший из корней.

$$x^2 - 6x - 16 = 0$$

$$a = 1 \quad b = -6 \quad c = -16$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-16) = 36 + 64 = 100$$

$$x_1 = \frac{-(-6) + \sqrt{100}}{2 \cdot 1} = \frac{6 + 10}{2} = 8 \quad \text{больший корень}$$

$$x_2 = \frac{-(-6) - \sqrt{100}}{2 \cdot 1} = \frac{6 - 10}{2} = -2$$

Ответ: 8

09. Уравнения
Блок 2. ФИПИ. Расширенная версия
Примеры решений

Задание 1. Найдите корень уравнения.

$$\begin{aligned} 1) \quad & -9 + x = 3x - 7 \\ & x - 3x = -7 + 9 \\ & -2x = 2 \quad | :(-2) \\ & x = 2 : (-2) \\ & x = -1 \end{aligned}$$

Ответ: -1

$$\begin{aligned} 2) \quad & 3 - 4(3x - 5) = 12 - 7x \\ & 3 - 12x + 20 = 12 - 7x \\ & -12x + 7x = 12 - 3 - 20 \\ & -5x = -11 \quad | :(-5) \\ & x = \frac{-11}{-5} \\ & x = 2,2 \end{aligned}$$

Ответ: 2,2

$$\begin{aligned} 3) \quad & x - 1 - 2(x + 2) = -3(1 - x) + 8 \\ & x - 1 - 2x - 4 = -3 + 3x + 8 \\ & x - 2x - 3x = -3 + 8 + 1 + 4 \\ & x - 2x - 3x = -3 + 8 + 1 + 4 \\ & -4x = 10 \quad | :(-4) \\ & x = \frac{10}{-4} \\ & x = -2,5 \end{aligned}$$

Ответ: -2,5

$$\begin{aligned} 4) \quad & (x + 2)^2 = (7 - x)^2 \\ & x^2 + 4x + 4 = 49 - 14x + x^2 \\ & x^2 + 4x + 14x - x^2 = 49 - 4 \\ & 18x = 45 \quad | :18 \\ & x = \frac{45}{18} \\ & x = 2,5 \\ \\ & (x + 2)^2 = (x + 2)(x + 2) = \\ & x^2 + 2x + 2x + 4 = x^2 + 4x + 4 \\ & (7 - x)^2 = (7 - x)(7 - x) = \\ & = 49 - 7x - 7x + x^2 = 49 - 14x + x^2 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} & (x + 2)^2 = (7 - x)^2 \\ & \left[\begin{aligned} x + 2 &= +(7 - x) \\ x + 2 &= -(7 - x) \end{aligned} \right. \\ & \left[\begin{aligned} x + x &= 7 - 2 \\ x + 2 &= -7 + x \end{aligned} \right. \\ & \left[\begin{aligned} 2x &= 5 \quad | :2 \\ x - x &= -7 - 2 \end{aligned} \right. \\ & \left[\begin{aligned} x &= 2,5 \\ 0x &= -9 \text{ (корней нет)} \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Ответ: 2,5

$$\begin{aligned}
 5) \quad & (x-4)^2 + (x-1)^2 = 2x^2 \\
 & x^2 - 8x + 16 + x^2 - 2x + 1 = 2x^2 \\
 & x^2 - 8x + x^2 - 2x - 2x^2 = -16 - 1 \\
 & -10x = -17 \quad | :(-10) \\
 & x = \frac{-17}{-10} \quad x = 1,7
 \end{aligned}$$

Ответ: 1,7

$$\begin{aligned}
 6) \quad & 2x^2 + 3x - 8 = 5x^2 + 4x - (-5 + 3x^2) \\
 & 2x^2 + 3x - 8 = 5x^2 + 4x + 5 - 3x^2 \\
 & 2x^2 + 3x - 5x^2 - 4x + 3x^2 = 5 + 8 \\
 & 2x^2 + 3x - 5x^2 - 4x + 3x^2 = 5 + 8 \\
 & -x = 13 \quad | :(-1) \\
 & x = -13
 \end{aligned}$$

Ответ: -13

Задание 2. Найдите корень уравнения.

$$\begin{aligned}
 1) \quad & \frac{x^{18}}{1} - \frac{x}{18} = -\frac{34}{9} \\
 & \frac{18x}{18} - \frac{x}{18} = -\frac{68}{18} \quad | \cdot 18 \\
 & 18x - x = -68 \\
 & 17x = -68 \quad | :17 \\
 & x = -68 : 17 \\
 & x = -4
 \end{aligned}$$

Ответ: -4

$$\begin{aligned}
 2) \quad & -5 + \frac{x}{3} = \frac{x+8}{6} \\
 & \frac{-5^{(6)}}{1} + \frac{x^{(2)}}{3} = \frac{(x+8)}{6} \\
 & \frac{-30}{6} + \frac{2x}{6} = \frac{x+8}{6} \quad | \cdot 6 \\
 & -30 + 2x = x + 8 \\
 & 2x - x = 8 + 30 \\
 & x = 38
 \end{aligned}$$

Ответ: 38

$$\begin{aligned}
 3) \quad & \frac{7x+2}{4} + 1 = \frac{5x}{3} \\
 & \frac{(7x+2)^{(3)}}{4} + \frac{1^{(12)}}{1} = \frac{5x^{(4)}}{3} \\
 & \frac{21x+6}{12} + \frac{12}{12} = \frac{20x}{12} \quad | \cdot 12 \\
 & 21x + 6 + 12 = 20x \\
 & 21x - 20x = -6 - 12 \\
 & x = -18
 \end{aligned}$$

Ответ: -18

$$\begin{aligned}
 4) \quad & \frac{16}{x+3} = -\frac{8}{11} \quad | :8 \\
 & \frac{2}{x+3} = -\frac{1}{11} \\
 & x+3 \neq 0 \quad x \neq -3 \\
 & \text{по правилу пропорции:} \\
 & 2 \cdot 11 = (x+3) \cdot (-1) \\
 & 22 = -x - 3 \\
 & x = -3 - 22 \\
 & x = -25
 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
 & \frac{16}{x+3} = -\frac{8}{11}^{(2)} \\
 & \frac{16}{x+3} = \frac{16}{-22} \\
 & x+3 = -22 \\
 & x = -22 - 3 \\
 & x = -25
 \end{aligned}$$

Ответ: -25

$$\begin{aligned}
 5) \quad & \frac{5}{x+9} = -2 \quad \frac{5}{x+9} = -\frac{2}{1} \\
 & x+9 \neq 0, \text{ т.е } x \neq -9 \\
 & \text{по правилу пропорции:} \\
 & 5 \cdot 1 = (x+9) \cdot (-2) \\
 & 5 = -2x - 18 \\
 & 2x = -18 - 5 \\
 & 2x = -23 \quad | :2 \\
 & x = -11,5
 \end{aligned}$$

Ответ: -11,5

$$\begin{aligned}
 6) \quad & \frac{5}{x-12} = \frac{12}{x-5} \\
 & 5(x-5) = (x-12) \cdot 12 \\
 & 5x - 25 = 12x - 144 \\
 & 5x - 12x = -144 + 25 \\
 & -7x = -119 \quad | :(-7) \\
 & x = -119 : (-7) \\
 & x = 17
 \end{aligned}$$

ОДЗ:

$$\begin{cases} x-12 \neq 0, \\ x-5 \neq 0 \\ x \neq 12, \\ x \neq 5 \end{cases}$$

Ответ: 17

Задание 3. Решите уравнение. Если уравнение имеет более одного корня, в ответ запишите меньший из корней.

1) $(4x-2)(-2x+5)=0$

$4x-2=0$ или $-2x+5=0$

$4x=2$ $|-:4$ $-2x=-5$ $|-:(-2)$

$x=\frac{2}{4}$

$x=0,5$

меньший кор.

Ответ: 0,5

2) $7x^2+14x=0$

$7x(x+2)=0$

$7x=0$ $|-:7$ или $x+2=0$

$x=0$

$x=-2$

меньший кор.

Ответ: -2

Задание 4. Решите уравнение. Если уравнение имеет более одного корня, в ответ запишите больший из корней.

1) $(-x+2)(4x+4)=0$

$-x+2=0$

$-x=-2$ $|-:(-1)$

$x=2$

больший кор.

Ответ: 2

$4x+4=0$

$4x=-4$ $|-:4$

$x=-1$

2) $6x^2-30x=0$

$6x(x-5)=0$

$6x=0$ $|-:6$

$x=0$

$x-5=0$

$x=5$

больший кор.

Ответ: 5

3) $8x^2=72x$

$8x^2-72x=0$

$8x(x-9)=0$

$8x=0$ $|-:8$

$x=0$

$x-9=0$

$x=9$

больший корень

Ответ: 9

Задание 5. Решите уравнение. Если уравнение имеет более одного корня, в ответ запишите меньший из корней.

1) $x^2+11=12x$

$x^2-12x+11=0$

$a=1$ $b=-12$ $c=11$ $D=b^2-4ac$

$D=(-12)^2-4\cdot 1\cdot 11=144-44=100$

$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$

$x_1=\frac{-(-12)+\sqrt{100}}{2\cdot 1}=\frac{12+10}{2}=11$

$x_2=\frac{-(-12)-\sqrt{100}}{2\cdot 1}=\frac{12-10}{2}=1$

меньший корень

Ответ: 1

2) $x^2 - 5x = 24$

$x^2 - 5x - 24 = 0$

$a=1 \quad b=-5 \quad c=-24 \quad D=b^2-4ac$

$D=(-5)^2-4 \cdot 1 \cdot (-24)=25+96=121$

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

$x_1 = \frac{-(-5) + \sqrt{121}}{2 \cdot 1} = \frac{5+11}{2} = 8$

$x_2 = \frac{-(-5) - \sqrt{121}}{2 \cdot 1} = \frac{5-11}{2} = -3$

меньший корень

Ответ: -3

3) $5x^2 - 7x + 2 = 0$

$a=5 \quad b=-7 \quad c=2$

$D=b^2-4ac$

$D=(-7)^2-4 \cdot 5 \cdot 2=49-40=9$

$x_1 = \frac{-(-7) + \sqrt{9}}{2 \cdot 5} = \frac{7+3}{10} = 1$

$x_2 = \frac{-(-7) - \sqrt{9}}{2 \cdot 5} = \frac{7-3}{10} = 0,4$

меньший корень

Ответ: 0,4

Задание 6. Решите уравнение. Если уравнение имеет более одного корня, в ответ запишите больший из корней.

1) $x^2 + 30 = 11x$

$x^2 - 11x + 30 = 0$

$a=1 \quad b=-11 \quad c=30$

$D=b^2-4ac$

$D=(-11)^2-4 \cdot 1 \cdot 30=121-120=1$

$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-11) + \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{11+1}{2} = 6$

больший корень

$x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-11) - \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{11-1}{2} = 5$

Ответ: 6

2) $x^2 + x = 20$

$x^2 + x - 20 = 0$

$a=1 \quad b=1 \quad c=-20$

$D=b^2-4ac$

$D=1^2-4 \cdot 1 \cdot (-20)=1+80=81$

$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{81}}{2 \cdot 1} = \frac{-1+9}{2} = 4$

больший корень

$x_2 = \frac{-1 - \sqrt{81}}{2 \cdot 1} = \frac{-1-9}{2} = -5$

Ответ: 4

3) $2x^2 + 5x + 3 = 0$

$a=2 \quad b=5 \quad c=3$

$D=b^2-4ac$

$D=5^2-4 \cdot 2 \cdot 3=25-24=1$

$x_1 = \frac{-5 + \sqrt{1}}{2 \cdot 2} = \frac{-5+1}{4} = -1$

больший корень

$x_2 = \frac{-5 - \sqrt{1}}{2 \cdot 2} = \frac{-5-1}{4} = -1,5$

Ответ: -1

09. Уравнения

Блок 3. Типовые экзаменационные варианты

Примеры решений

Задание 1. Решите уравнение $(2x-1)^2 - 4x^2 = 0$. Если корней несколько, запишите их через точку с запятой в порядке возрастания.

$$(2x-1)^2 - 4x^2 = 0$$

$$4x^2 - 4x + 1 - 4x^2 = 0$$

$$-4x = -1 \quad | :(-4)$$

$$x = \frac{-1}{-4}$$

$$x = 0,25$$

$$(2x-1)^2 = (2x-1)(2x-1) =$$

$$= 4x^2 - 2x - 2x + 1 = 4x^2 - 4x + 1$$

$$\text{или} \quad (2x-1)^2 - 4x^2 = 0$$

$$(2x-1)^2 - (2x)^2 = 0 \text{ – разность квадратов}$$

$$(2x-1-2x)(2x-1+2x) = 0$$

$$-1 \cdot (4x-1) = 0$$

$$4x-1 = 0$$

$$4x = 1 \quad | :4$$

$$x = \frac{1}{4}$$

$$x = 0,25$$

Ответ: 0,25

Задание 2. Решите уравнение

$\frac{1}{4}x^2 - 4 = 0$. Если уравнение имеет

более одного корня, в ответ запишите меньший из корней.

$$\frac{1}{4}x^2 - 4 = 0 \quad | \cdot 4$$

$$x^2 - 16 = 0$$

$$x^2 - 4^2 = 0 \text{ – разность квадратов}$$

$$(x-4)(x+4) = 0$$

$$ab = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ или } b = 0$$

$$x-4 = 0 \quad \text{или} \quad x+4 = 0$$

$$x = 4$$

$$x = -4$$

меньший корень

Ответ: -4

Задание 3. Решите уравнение $-\frac{3}{5}x^2 + 15 = 0$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответ запишите больший из корней.

$$-\frac{3}{5}x^2 + 15 = 0 \quad | \cdot 5$$

$$-3x^2 + 75 = 0 \quad | :(-3)$$

$$x^2 - 25 = 0$$

$$x^2 - 5^2 = 0 \text{ – разность квадратов}$$

$$(x-5)(x+5) = 0$$

$$x-5 = 0$$

$$\text{или} \quad x+5 = 0$$

$$x = 5$$

$$x = -5$$

больший корень

Ответ: 5