

## 14. Арифметические и геометрические прогрессии

### Блок 1. ФИПИ Примеры решений

**Задание 1.** В амфитеатре 15 рядов. В первом ряду 28 мест, а в каждом следующем на 3 места больше, чем в предыдущем. Сколько мест в двенадцатом ряду амфитеатра?

Дано:

$$a_1 = 28$$

$$d = 3$$

Найти:

$$a_{12} - ?$$

Решение:

$$a_n = a_1 + d(n-1)$$

$$a_{12} = a_1 + d \cdot 11$$

$$a_{12} = 28 + 3 \cdot 11 = 61$$

Проверка:

$$a_1 = 28 \quad a_5 = 40 \quad a_9 = 52$$

$$a_2 = 31 \quad a_6 = 43 \quad a_{10} = 55$$

$$a_3 = 34 \quad a_7 = 46 \quad a_{11} = 58$$

$$a_4 = 37 \quad a_8 = 49 \quad a_{12} = 61$$

**Ответ: 61**

**Задание 2.** При проведении опыта вещество равномерно охлаждали в течение 10 минут. При этом каждую минуту температура вещества уменьшалась на  $7^\circ\text{C}$ . Найдите температуру вещества (в градусах Цельсия) через 4 минуты после начала проведения опыта, если его начальная температура составляла  $-13^\circ\text{C}$ .

Дано:

$$d = -7$$

$$a_{\text{нач}} = -13$$

Найти:

$$a_4 - ?$$

Решение:

$$a_1 = a_{\text{нач}} + d$$

$$a_1 = -13 - 7 = -20$$

$$a_n = a_1 + d(n-1)$$

$$a_4 = a_1 + d \cdot 3$$

$$a_4 = -20 - 7 \cdot 3 = -20 - 21 = -41$$

Проверка:

$$a_{\text{нач}} = -13 \quad a_3 = -34$$

$$a_1 = -20 \quad a_4 = -41$$

$$a_2 = -27$$

**Ответ: -41**

**Задание 3.** В амфитеатре 16 рядов, причём в каждом следующем ряду на одно и то же число мест больше, чем в предыдущем. В пятом ряду 17 мест, а в девятом ряду 25 мест. Сколько мест в последнем ряду амфитеатра?

Дано:

$$n = 16$$

$$a_5 = 17$$

$$a_9 = 25$$

Найти:

$$a_{16} - ?$$

Решение:

$$a_9 = a_5 + 4d$$

$$25 = 17 + 4d$$

$$4d = 25 - 17$$

$$4d = 8 \quad d = 8 : 4 = 2$$

*I способ*

$$a_{16} = a_9 + 7d$$

$$a_{16} = 25 + 7 \cdot 2 = 25 + 14 = 39$$

Проверка:

$$a_5 = 17 \quad a_{11} = 29$$

$$a_6 = 19 \quad a_{12} = 31$$

$$a_7 = 21 \quad a_{13} = 33$$

$$a_8 = 23 \quad a_{14} = 35$$

$$a_9 = 25 \quad a_{15} = 37$$

$$a_{10} = 27 \quad a_{16} = 39$$

*II способ*

$$a_n = a_1 + d(n-1)$$

$$\begin{cases} a_9 = a_1 + d \cdot 8, \\ a_5 = a_1 + d \cdot 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 25 = a_1 + 8d \\ 17 = a_1 + 4d \end{cases}$$

$$8 = 4d$$

$$d = 8 : 4 = 2$$

$$17 = a_1 + 4 \cdot 2$$

$$a_1 = 17 - 8 = 9$$

$$a_n = a_1 + d(n-1)$$

$$a_{16} = a_1 + d \cdot 15$$

$$a_{16} = 9 + 2 \cdot 15 = 9 + 30 = 39$$

**Ответ: 39**

**Задание 4.** В амфитеатре 14 рядов. В первом ряду 24 места, а в каждом следующем на 2 места больше, чем в предыдущем. Сколько всего мест в амфитеатре?

Дано:

$$n = 14$$

$$a_1 = 24$$

$$d = 2$$

Найти:

$$S_{14} - ?$$

Решение:

$$a_n = a_1 + d(n - 1)$$

$$a_{14} = 24 + 2 \cdot 13 = 24 + 26 = 50$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

$$S_{14} = \frac{a_1 + a_{14}}{2} \cdot 14$$

$$S_{14} = \frac{24 + 50}{2} \cdot 14 = 74 \cdot 7 = 518$$

**Ответ: 518**

Проверка:

$a_1 = 24$	$a_9 = 40$
$a_2 = 26$	$a_{10} = 42$
$a_3 = 28$	$a_{11} = 44$
$a_4 = 30$	$a_{12} = 46$
$a_5 = 32$	$a_{13} = 48$
$a_6 = 34$	$a_{14} = 50$
$a_7 = 36$	$S_{14} = (24 + 50) \cdot 7$
$a_8 = 38$	$S_{14} = 518$

**Задание 5.** Камень бросают в глубокое ущелье. При этом в первую секунду он пролетает 6 метров, а в каждую следующую секунду на 10 метров больше, чем в предыдущую, до тех пор, пока не достигнет дна ущелья. Сколько метров пролетит камень за первые восемь секунд?

Дано:

$$a_1 = 6$$

$$d = 10$$

$$n = 8$$

Найти:

$$S_8 - ?$$

Решение:

$$a_n = a_1 + d(n - 1) \quad S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

$$a_8 = 6 + 10 \cdot 7 = 6 + 70 = 76$$

$$S_8 = \frac{a_1 + a_8}{2} \cdot 8$$

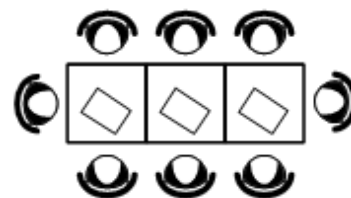
$$S_8 = \frac{6 + 76}{2} \cdot 8 = 82 \cdot 4 = 328$$

Проверка:

$a_1 = 6$	$a_6 = 56$
$a_2 = 16$	$a_7 = 66$
$a_3 = 26$	$a_8 = 76$
$a_4 = 36$	$S_8 = (6 + 76) \cdot 4$
$a_5 = 46$	$S_8 = 328$

**Ответ: 328**

**Задание 14 (Блок 2).** В кафе есть только квадратные столики, за каждый из которых могут сесть 4 человека. Если сдвинуть два квадратных столика, то получится стол, за который могут сесть 6 человек. На рисунке изображён случай, когда сдвинули 3 квадратных столика вдоль одной линии. В этом случае получился стол, за который могут сесть 8 человек. Сколько человек может сесть за стол, который получится, если сдвинуть 15 квадратных столиков вдоль одной линии?



Дано:

$$a_1 = 4$$

$$a_2 = 6$$

$$a_3 = 8$$

Найти:

$$a_{15} - ?$$

Решение:

$$d = a_2 - a_1 = 6 - 4 = 2$$

$$a_n = a_1 + d(n - 1)$$

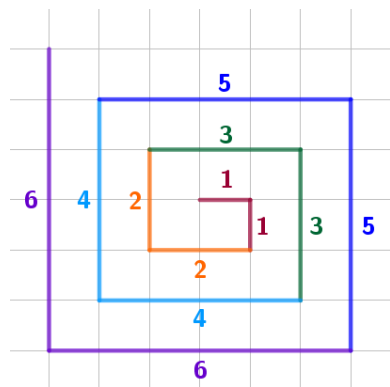
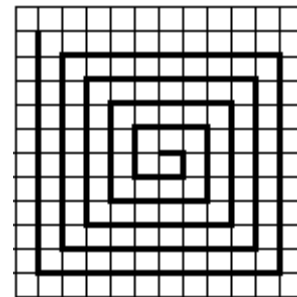
$$a_{15} = 4 + 2 \cdot 14 = 4 + 28 = 32$$

Проверка:

$a_1 = 4$	$a_6 = 14$	$a_{11} = 24$
$a_2 = 6$	$a_7 = 16$	$a_{12} = 26$
$a_3 = 8$	$a_8 = 18$	$a_{13} = 28$
$a_4 = 10$	$a_9 = 20$	$a_{14} = 30$
$a_5 = 12$	$a_{10} = 22$	$a_{15} = 32$

**Ответ: 32**

**Задание 18 (Блок 2).** На клетчатой бумаге с размером клетки  $1 \times 1$  нарисована «змейка», представляющая из себя ломаную, состоящую из чётного числа звеньев, идущих по линиям сетки. На рисунке изображён случай, когда последнее звено имеет длину 10. Найдите длину ломаной, построенной аналогичным образом, последнее звено которой имеет длину 120.



$$n=10 \quad l_{10} = 1+1+2+2+3+3+\dots+9+9+10+10 =$$

$$= (1+2+3+\dots+9+10) \cdot 2 = S_{10} \cdot 2$$

$$n=120 \quad l_{120} = (1+2+3+\dots+119+120) \cdot 2 = S_{120} \cdot 2$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \quad a_1 = 1 \quad a_n = 120 \quad n = 120$$

$$S_{120} = \frac{1+120}{2} \cdot 120 = 121 \cdot 60 = 7260$$

$$l_{120} = S_{120} \cdot 2 = 7260 \cdot 2 = 14520$$

**Ответ: 14520**

**Задание 6.** У Тани есть теннисный мячик. Она со всей силы бросила его об асфальт. После первого отскока мячик подлетел на высоту 270 см, а после каждого следующего отскока от асфальта подлетал на высоту в три раза меньше предыдущей. После какого по счёту отскока высота, на которую подлетит мячик, станет меньше 10 см?

Дано:

$$b_1 = 270$$

$$q = \frac{1}{3}$$

$$b_n < 10$$

Найти:

$$n - ?$$

Решение:

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1} = 270 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} < 10$$

$$270 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} < 10 \quad | :270$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} < \frac{10}{270}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} < \frac{1}{27}$$

$$\text{при } n=3: \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} > \frac{1}{27}$$

$$\text{при } n=4: \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27} = \frac{1}{27}$$

$$\text{при } n=5: \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81} < \frac{1}{27} \Rightarrow n=5$$

Проверка:

$$b_1 = 270$$

$$b_2 = 90$$

$$b_3 = 30$$

$$b_4 = 10$$

$$b_5 = 3\frac{1}{3} < 10$$

$$n = 5$$

**Ответ: 5**

**Комментарий:** данную задачу проще решать подбором (см. проверку).

**Задание 7.** У Яны есть попрыгунчик (каучуковый шарик). Она со всей силы бросила его об асфальт. После первого отскока попрыгунчик подлетел на высоту 320 см, а после каждого следующего отскока от асфальта подлетал на высоту в два раза меньше предыдущей. После какого по счёту отскока высота, на которую подлетит попрыгунчик, станет меньше 6 см?

Дано:

$$b_1 = 320$$

$$q = \frac{1}{2}$$

$$b_n < 6$$

Найти:

$$n - ?$$

Решение:

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1} = 320 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < 6$$

$$320 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < 6 \quad | :320$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < \frac{6}{320}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < \frac{3}{160} < \frac{4}{160}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < \frac{1}{40}$$

$$\text{при } n = 6: \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32} > \frac{1}{40}$$

$$\text{при } n = 7: \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64} < \frac{1}{40} \Rightarrow n = 7$$

Проверка:

$$b_1 = 320$$

$$b_2 = 160$$

$$b_3 = 80$$

$$b_4 = 40$$

$$b_5 = 20$$

$$b_6 = 10$$

$$b_7 = 5 < 6$$

$$n = 7$$

**Ответ: 7**

**Комментарий:** данную задачу проще решать подбором (см. проверку).

**Задание 8.** В ходе распада радиоактивного изотопа его масса уменьшается вдвое каждые 6 минут. В начальный момент масса изотопа составляла 480 мг. Найдите массу изотопа через 36 минут. Ответ дайте в миллиграммах.

Дано:

$$q = \frac{1}{2}$$

$$t_1 = 6$$

$$b_{\text{нач}} = 480$$

$$t_n = 36$$

Найти:

$$b_n - ?$$

Решение:

$$n = t_n : t_1 = 36 : 6 = 6$$

$$b_1 = b_{\text{нач}} \cdot q$$

$$b_1 = 480 \cdot \frac{1}{2} = 240$$

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$$

$$b_6 = b_1 \cdot q^5$$

$$b_6 = 240 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{240}{1} \cdot \frac{1}{32} = \frac{15}{2} = \frac{75}{10} = 7,5$$

Проверка:

$$b_{\text{нач}} = 480$$

$$t_1 = 6: \quad b_1 = 240$$

$$t_2 = 12: \quad b_2 = 120$$

$$t_3 = 18: \quad b_3 = 60$$

$$t_4 = 24: \quad b_4 = 30$$

$$t_5 = 30: \quad b_5 = 15$$

$$t_6 = 36: \quad b_6 = 7,5$$

**Ответ: 7,5**

**Комментарий:** данную задачу проще решать подбором (см. проверку).

**Задание 9.** В ходе биологического эксперимента в чашку Петри с питательной средой поместили колонию микроорганизмов массой 12 мг. За каждые 20 минут масса колонии увеличивается в 3 раза. Найдите массу колонии микроорганизмов через 100 минут после начала эксперимента. Ответ дайте в миллиграммах.

Дано:

$b_{\text{нач}} = 12$

$t_1 = 20$

$q = 3$

$t_n = 100$

Найти:

$b_n - ?$

Решение:

$n = t_n : t_1 = 100 : 20 = 5$

$b_1 = b_{\text{нач}} \cdot q$

$b_1 = 12 \cdot 3 = 36$

$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$

$b_5 = b_1 \cdot q^4$

$b_5 = 36 \cdot 3^4 = 36 \cdot 81 = 2916$

Проверка:

$b_{\text{нач}} = 12$

$t_1 = 20: \quad b_1 = 36$

$t_2 = 40: \quad b_2 = 108$

$t_3 = 60: \quad b_3 = 324$

$t_4 = 80: \quad b_4 = 972$

$t_5 = 100: \quad b_5 = 2916$

**Ответ: 2916**

## 14. Арифметические и геометрические прогрессии

### Блок 2. ФИПИ. Расширенная версия

### Примеры решений

#### 1) Числовые последовательности

##### Задание 1.1.

Последовательность задана условиями:  $a_1 = -7$ ,  $a_{n+1} = a_n + 5$ . Найдите  $a_5$ .

Дано:

$a_1 = -7$

$a_{n+1} = a_n + 5$

Найти:

$a_5 - ?$

Решение:

$a_1 = -7$

$a_2 = a_1 + 5 = -7 + 5 = -2$

$a_3 = a_2 + 5 = -2 + 5 = 3$

$a_4 = a_3 + 5 = 3 + 5 = 8$

$a_5 = a_4 + 5 = 8 + 5 = 13$

**Ответ: 13**

##### Задание 1.2.

Последовательность задана условиями:  $b_1 = 9$ ,  $b_{n+1} = -4 \cdot \frac{1}{b_n}$ . Найдите  $b_3$ .

Дано:

$b_1 = 9$

$b_{n+1} = -4 \cdot \frac{1}{b_n}$

Найти:

$b_3 - ?$

Решение:

$b_1 = 9$

$b_2 = -4 \cdot \frac{1}{b_1} = -4 \cdot \frac{1}{9} = -\frac{4}{9}$

$b_3 = -4 \cdot \frac{1}{b_2} = -4 \cdot \frac{1}{\left(-\frac{4}{9}\right)} = -4 \cdot \left(-\frac{9}{4}\right) = 9$

**Ответ: 9**

II) Арифметическая прогрессия

**Задание 2.** Дана арифметическая прогрессия  $(a_n)$ , разность которой равна 2,1,  $a_1 = -4,3$ . Найдите  $a_6$ .

Дано:

$$d = 2,1$$

$$a_1 = -4,3$$

Найти:

$$a_6 - ?$$

Решение:

$$a_n = a_1 + d(n-1)$$

$$a_6 = a_1 + d \cdot 5$$

$$a_6 = -4,3 + 2,1 \cdot 5 = 6,2$$

Проверка:

$$a_1 = -4,3 \quad a_4 = 2,0$$

$$a_2 = -2,2 \quad a_5 = 4,1$$

$$a_3 = -0,1 \quad a_6 = 6,2$$

**Ответ: 6,2**

**Задание 3.** Выписаны первые три члена арифметической прогрессии: 10; 13; 16; ... Найдите 10-й член этой прогрессии.

Дано:

$$a_1 = 10$$

$$a_2 = 13$$

$$a_3 = 16$$

Найти:

$$a_{10} - ?$$

Решение:

$$d = a_2 - a_1$$

$$d = 13 - 10 = 3$$

$$a_n = a_1 + d(n-1)$$

$$a_{10} = a_1 + d \cdot 9$$

$$a_{10} = 10 + 3 \cdot 9 = 37$$

Проверка:

$$a_1 = 10 \quad a_6 = 25$$

$$a_2 = 13 \quad a_7 = 28$$

$$a_3 = 16 \quad a_8 = 31$$

$$a_4 = 19 \quad a_9 = 34$$

$$a_5 = 22 \quad a_{10} = 37$$

**Ответ: 37**

**Задание 4.** Дана арифметическая прогрессия  $(a_n)$ , разность которой равна  $-3,5$  и  $a_1 = 5,2$ . Найдите сумму первых восьми её членов.

Дано:

$$d = -3,5$$

$$a_1 = 5,2$$

Найти:

$$S_8 - ?$$

Решение:

$$a_n = a_1 + d(n-1)$$

$$a_8 = a_1 + d \cdot 7$$

$$a_8 = 5,2 + (-3,5) \cdot 7$$

$$a_8 = 5,2 - 24,5 = -19,3$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

$$S_8 = \frac{a_1 + a_8}{2} \cdot 8 = (a_1 + a_8) \cdot 4$$

$$S_8 = (5,2 - 19,3) \cdot 4 = -56,4$$

Проверка:

$$a_1 = 5,2 \quad a_5 = -8,8$$

$$a_2 = 1,7 \quad a_6 = -12,3$$

$$a_3 = -1,8 \quad a_7 = -15,8$$

$$a_4 = -5,3 \quad a_8 = -19,3$$

$$S_8 = 5,2 + 1,7 - 1,8 - 5,3 - 8,8 - 12,3 - 15,8 - 19,3 =$$

$$= 6,9 - 63,3 = -56,4$$

**Ответ: -56,4**

**Задание 5.** Выписаны первые три члена арифметической прогрессии:  $-13$ ;  $-9$ ;  $-5$ ; ... Найдите сумму первых семи её членов.

Дано:

$$a_1 = -13$$

$$a_2 = -9$$

$$a_3 = -5$$

Найти:

$$S_7 - ?$$

Решение:

$$d = a_2 - a_1 = (-9) - (-13) = 4$$

$$a_n = a_1 + d(n-1)$$

$$a_7 = a_1 + d \cdot 6$$

$$a_7 = -13 + 4 \cdot 6 = -13 + 24 = 11$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

$$S_7 = \frac{a_1 + a_7}{2} \cdot 7$$

$$S_7 = \frac{-13 + 11}{2} \cdot 7 = -7$$

Проверка:

$$a_1 = -13 \quad a_5 = 3$$

$$a_2 = -9 \quad a_6 = 7$$

$$a_3 = -5 \quad a_7 = 11$$

$$a_4 = -1$$

$$S_7 = -13 - 9 - 5 - 1 + 3 + 7 + 11 = -7$$

**Ответ: -7**

**Задание 6.** Арифметическая прогрессия  $(a_n)$  задана условиями:

$a_1 = 41$ ,  $a_{n+1} = a_n - 6$ . Найдите сумму первых пяти её членов.

Дано:

$$a_1 = 41$$

$$a_{n+1} = a_n - 6$$

Найти:

$$S_5 - ?$$

Решение:

$$a_{n+1} = a_n - 6 \quad d = -6$$

$$a_n = a_1 + d(n-1)$$

$$a_5 = a_1 + d \cdot 4$$

$$a_5 = 41 + (-6) \cdot 4 = 17$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

$$S_5 = \frac{a_1 + a_5}{2} \cdot 5$$

$$S_5 = \frac{41 + 17}{2} \cdot 5 = 145$$

Проверка:

$$a_1 = 41$$

$$a_2 = a_1 - 6 = 41 - 6 = 35$$

$$a_3 = a_2 - 6 = 35 - 6 = 29$$

$$a_4 = a_3 - 6 = 29 - 6 = 23$$

$$a_5 = a_4 - 6 = 23 - 6 = 17$$

$$S_5 = 41 + 35 + 29 + 23 + 17$$

$$S_5 = 145$$

**Ответ: 145**

**Задание 7.** Выписано несколько последовательных членов арифметической прогрессии: ...;  $-1$ ;  $x$ ;  $-19$ ;  $-28$ ; ... Найдите член прогрессии, обозначенный буквой  $x$ .

Дано:

$$a_1 = -1$$

$$a_3 = -19$$

$$a_4 = -28$$

Найти:

$$a_2 - ?$$

Решение:

*I способ*

$$d = a_4 - a_3 = (-28) - (-19) =$$

$$= -28 + 19 = -9$$

$$a_2 = a_1 + d$$

$$a_2 = -1 - 9 = -10$$

*II способ*

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

$$a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}$$

$$a_2 = \frac{-1 - 19}{2} = -10$$

**Ответ: -10**

**Задание 8.** Найдите разность арифметической прогрессии  $(a_n)$ , в которой  $a_7 = 8,4$ ,  $a_{12} = 13,9$ .

<u>Дано:</u>	<u>Решение:</u>	$a_n = a_1 + d(n-1)$	<u>Проверка:</u>
$a_7 = 8,4$	<i>I способ</i>	<i>II способ</i>	$a_7 = 8,4$
$a_{12} = 13,9$	$a_{12} = a_7 + 5d$	$\begin{cases} a_{12} = a_1 + d \cdot 11 \\ a_7 = a_1 + d \cdot 6 \end{cases}$	$a_8 = 9,5$
<u>Найти:</u>	$13,9 = 8,4 + 5d$	$\begin{cases} 13,9 = a_1 + 11d \\ 8,4 = a_1 + 6d \end{cases}$	$a_9 = 10,6$
$d - ?$	$5d = 13,9 - 8,4$	$\frac{5,5 = 5d}{5,5 = 5d}$	$a_{10} = 11,7$
	$5d = 5,5$	$d = 5,5 : 5 = 1,1$	$a_{11} = 12,8$
	$d = 5,5 : 5 = 1,1$		$a_{12} = 13,9$

**Ответ: 1,1**

### III) Геометрическая прогрессия

**Задание 9.** Геометрическая прогрессия задана условиями:

$b_1 = -2$ ,  $b_{n+1} = 3b_n$ . Найдите  $b_6$ .

<u>Дано:</u>	<u>Решение:</u>	<u>Проверка:</u>
$b_1 = -2$	$b_{n+1} = 3b_n$	$b_1 = -2$
$b_{n+1} = 3b_n$	$q = 3$	$b_2 = 3 \cdot (-2) = -6$
<u>Найти:</u>	$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$	$b_3 = 3 \cdot (-6) = -18$
$b_6 - ?$	$b_6 = b_1 \cdot q^5$	$b_4 = 3 \cdot (-18) = -54$
	$b_6 = -2 \cdot 3^5 = -486$	$b_5 = 3 \cdot (-54) = -162$
		$b_6 = 3 \cdot (-162) = -486$

**Ответ: -486**

**Задание 10.** Выписаны первые три члена геометрической прогрессии:  $-150$ ;  $60$ ;  $-24$ ; ... Найдите её четвертый член.

<u>Дано:</u>	<u>Решение:</u>	<u>Проверка:</u>
$b_1 = -150$	$q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{60}{-150} = -\frac{2}{5}$	$b_1 = -150$
$b_2 = 60$		$b_2 = -150 \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) = 60$
$b_3 = -24$	$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$	$b_3 = 60 \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) = -24$
<u>Найти:</u>	$b_4 = b_1 \cdot q^3$	$b_4 = -24 \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) = \frac{48}{5} = 9,6$
$b_4 - ?$	$b_4 = -150 \cdot \left(-\frac{2}{5}\right)^3 = 150 \cdot \frac{8}{125} = 9,6$	
	или $b_4 = b_3 \cdot q = -24 \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) = 9,6$	

**Ответ: 9,6**



**Задание 11.** Выписаны первые три члена геометрической прогрессии: 3; -12; 48; ... Найдите сумму первых пяти её членов.

Дано:

$$\begin{aligned} b_1 &= 3 \\ b_2 &= -12 \\ b_3 &= 48 \end{aligned}$$

Найти:

$$S_5 - ?$$

Решение:

$$q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{-12}{3} = -4$$

$$S_n = \frac{(q^n - 1) \cdot b_1}{q - 1}$$

$$S_5 = \frac{(q^5 - 1) \cdot b_1}{q - 1}$$

$$S_5 = \frac{((-4)^5 - 1) \cdot 3}{-4 - 1} = \frac{-1025 \cdot 3}{-5} = 615$$

Проверка:

$$\begin{aligned} b_1 &= 3 \\ b_2 &= 3 \cdot (-4) = -12 \\ b_3 &= -12 \cdot (-4) = 48 \\ b_4 &= 48 \cdot (-4) = -192 \\ b_5 &= -192 \cdot (-4) = 768 \\ S_5 &= 3 - 12 + 48 - 192 + 768 = \\ &= 39 + 576 = 615 \end{aligned}$$

**Ответ: 615**

**Задание 12.** Геометрическая прогрессия задана условиями:

$b_1 = -7$ ,  $b_{n+1} = 2b_n$ . Найдите сумму первых шести её членов.

Дано:

$$\begin{aligned} b_1 &= -7 \\ b_{n+1} &= 2b_n \end{aligned}$$

Найти:

$$S_6 - ?$$

Решение:

$$b_{n+1} = 2b_n$$

$$q = 2$$

$$S_n = \frac{(q^n - 1) \cdot b_1}{q - 1}$$

$$S_6 = \frac{(q^6 - 1) \cdot b_1}{q - 1}$$

$$S_6 = \frac{(2^6 - 1) \cdot (-7)}{2 - 1} = \frac{63 \cdot (-7)}{1} = -441$$

Проверка:

$$\begin{aligned} b_1 &= -7 \\ b_2 &= -7 \cdot 2 = -14 \\ b_3 &= -14 \cdot 2 = -28 \\ b_4 &= -28 \cdot 2 = -56 \\ b_5 &= -56 \cdot 2 = -112 \\ b_6 &= -112 \cdot 2 = -224 \\ S_6 &= -7 - 14 - 28 - 56 - \\ & - 112 - 224 = -441 \end{aligned}$$

**Ответ: -441**

**Задание 13.** Выписано несколько последовательных членов геометрической прогрессии: ...; 2,4;  $x$ ; 60; 300; ... Найдите член прогрессии, обозначенный буквой  $x$ .

Дано:

$$\begin{aligned} b_1 &= 2,4 \\ b_3 &= 60 \\ b_4 &= 300 \end{aligned}$$

Найти:

$$b_2 - ?$$

Решение:

*I способ*

$$q = \frac{b_4}{b_3} = \frac{300}{60} = 5$$

$$b_2 = 2,4 \cdot 5$$

$$b_2 = 12$$

*II способ*

$$b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$$

$$b_2 = \sqrt{b_1 \cdot b_3}$$

$$b_2 = \sqrt{2,4 \cdot 60} = \sqrt{144} = 12$$

**Ответ: 12**

IV) Прикладные задачи

**Задание 15.** В первом ряду кинозала 30 мест, а в каждом следующем на 2 больше, чем в предыдущем. Сколько мест в пятнадцатом ряду?

Дано:

$$a_1 = 30$$

$$d = 2$$

Найти:

$$a_{15} - ?$$

Решение:

$$a_n = a_1 + d(n-1)$$

$$a_{15} = a_1 + d \cdot 14$$

$$a_{15} = 30 + 2 \cdot 14 = 58$$

Проверка:

$$a_1 = 30$$

$$a_2 = 32$$

$$a_3 = 34$$

$$a_4 = 36$$

$$a_5 = 38$$

$$a_6 = 40$$

$$a_7 = 42$$

$$a_8 = 44$$

$$a_9 = 46$$

$$a_{10} = 48$$

$$a_{11} = 50$$

$$a_{12} = 52$$

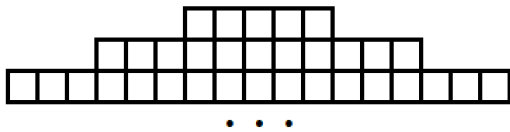
$$a_{13} = 54$$

$$a_{14} = 56$$

$$a_{15} = 58$$

**Ответ: 58**

**Задание 16.** Фигура составляется из квадратов так, как показано на рисунке. В каждой следующей строке на 6 квадратов больше, чем в предыдущей. Сколько квадратов в 28-й строке?



Дано:

$$a_1 = 5$$

$$d = 6$$

Найти:

$$a_{28} - ?$$

Решение:

$$a_n = a_1 + d(n-1)$$

$$a_{28} = a_1 + d \cdot 27$$

$$a_{28} = 5 + 6 \cdot 27 = 167$$

Проверка:

$$a_1 = 5$$

$$a_2 = 11$$

$$a_4 = 23$$

$$a_6 = 35$$

$$a_8 = 47$$

$$a_{10} = 59$$

$$a_{12} = 71$$

$$a_{14} = 83$$

$$a_{16} = 95$$

$$a_{18} = 107$$

$$a_{20} = 119$$

$$a_{22} = 131$$

$$a_{24} = 143$$

$$a_{26} = 155$$

$$a_{28} = 167$$

**Ответ: 167**

**Задание 17.** Хозяин договорился с рабочими, что они выкопают ему колодец на следующих условиях: за первый метр он заплатит им 3800 рублей, а за каждый следующий метр будет платить на 1200 рублей больше, чем за предыдущий. Сколько рублей хозяин должен будет заплатить рабочим, если они выкопают колодец глубиной 9 метров?

Дано:

$$a_1 = 3800$$

$$d = 1200$$

Найти:

$$S_9 - ?$$

Решение:

$$a_n = a_1 + d(n-1)$$

$$a_9 = 3800 + 1200 \cdot 8 = 13400$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

$$S_9 = \frac{a_1 + a_9}{2} \cdot 9$$

$$S_9 = \frac{3800 + 13400}{2} \cdot 9 = 77400$$

Проверка:

$$a_7 = 11000$$

$$a_8 = 12200$$

$$a_9 = 13400$$

$$a_4 = 7400$$

$$a_5 = 8600$$

$$a_6 = 9800$$

$$a_7 = 11000$$

$$a_8 = 12200$$

$$a_9 = 13400$$

$$S_9 = 3800 + 5000 + 6200 + 7400 + 8600 + 9800 + 11000 + 12200 + 13400 = 77400$$

**Ответ: 77400**

**Задание 19.** В ходе бета-распада радиоактивного изотопа А каждые 7 минут половина его атомов без потери массы преобразуются в атомы стабильного изотопа Б. В начальный момент масса изотопа А составляла 960 мг. Найдите массу образовавшегося изотопа Б через 42 минуты. Ответ дайте в миллиграммах.

Дано:

$$t_1 = 7$$

$$q = \frac{1}{2}$$

$$b_{\text{нач}} = m_A = 960$$

$$t_n = 42$$

Найти:

$$m_B - ?$$

Решение:

$$n = t_n : t_1 = 42 : 7 = 6$$

$$b_1 = b_{\text{нач}} \cdot q$$

$$b_1 = 960 \cdot \frac{1}{2} = 480$$

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$$

$$b_6 = b_1 \cdot q^5$$

$$b_6 = 480 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{480}{1} \cdot \frac{1}{32} = \frac{15}{1} = 15$$

$$m_B = 960 - b_6 = 960 - 15 = 945$$

Проверка:

	$m_A$	$m_B$
нач	<b>960</b>	<b>0</b>
$t_1 = 7$	480	480
$t_2 = 14$	240	720
$t_3 = 21$	120	840
$t_4 = 28$	60	900
$t_5 = 35$	30	930
$t_6 = 42$	15	<b>945</b>

**Ответ: 945**

**14. Арифметические и геометрические прогрессии**  
**Блок 3. Типовые экзаменационные варианты**  
**Примеры решений**

**Задание 1.** При проведении химической реакции в растворе образуется нерастворимый осадок. Наблюдения показали, что каждую минуту образуется 0,6 г осадка. Найдите массу осадка (в граммах) в растворе спустя девять минут после начала реакции.

Дано:

$a_1 = 0,6$

$d = 0,6$

Найти:

$a_9 - ?$

Решение:

$a_n = a_1 + d(n-1)$

$a_9 = a_1 + d \cdot 8$

$a_9 = 0,6 + 0,6 \cdot 8 = 0,6 + 4,8 = 5,4$

Проверка:

$a_1 = 0,6 \quad a_4 = 2,4 \quad a_7 = 4,2$

$a_2 = 1,2 \quad a_5 = 3,0 \quad a_8 = 4,8$

$a_3 = 1,8 \quad a_6 = 3,6 \quad a_9 = 5,4$

**Ответ: 5,4**

**Задание 2.** Курс воздушных ванн начинают с 5 минут в первый день и увеличивают время этой процедуры в каждый следующий день на 10 минут. В какой по счёту день продолжительность процедуры достигнет 1 часа 15 минут?

Дано:

$a_1 = 5$

$d = 10$

$a_n = 60 + 15$

Найти:

$n - ?$

Решение:

$a_n = a_1 + d(n-1)$

$a_n = 5 + 10(n-1) = 75$

$5 + 10n - 10 = 75$

$10n = 75 + 5$

$10n = 80$

$n = 8$

Проверка:

$a_1 = 5 \quad a_4 = 35 \quad a_7 = 65$

$a_2 = 15 \quad a_5 = 45 \quad a_8 = 75$

$a_3 = 25 \quad a_6 = 55$

**Ответ: 8**

**Задание 3.** Для получения витамина D могут быть рекомендованы солнечные ванны. Загорать лучше утром до 10 часов или вечером после 17 часов. Михаилу назначили курс солнечных ванн. Михаил начинает курс с 15 минут в первый день и увеличивает время этой процедуры в каждый следующий день на 9 минут. В какой по счёту день продолжительность процедуры достигнет 1 часа?

Дано:

$a_1 = 15$

$d = 9$

$a_n = 60$

Найти:

$n - ?$

Решение:

$a_n = a_1 + d(n-1)$

$a_n = 15 + 9(n-1) = 60$

$9(n-1) = 60 - 15$

$9(n-1) = 45$

$n - 1 = 5$

$n = 6$

Проверка:

$a_1 = 15 \quad a_4 = 42$

$a_2 = 24 \quad a_5 = 51$

$a_3 = 33 \quad a_6 = 60$

**Ответ: 6**

**Задание 4.** В течение 25 банковских дней акции компании дорожали ежедневно на одну и ту же сумму. Сколько стоила акция компании в последний день этого периода, если в 8-й день акция стоила 793 рублей, а в 12-й день – 861 рублей.

<u>Дано:</u>	<u>Решение:</u>	<u>Проверка:</u>
$n = 25$	$a_{12} = a_8 + 4d$	$a_8 = 793 \quad a_{14} = 895 \quad a_{20} = 997$
$a_8 = 793$	$861 = 793 + 4d$	$a_9 = 810 \quad a_{15} = 912 \quad a_{21} = 1014$
$a_{12} = 861$	$4d = 861 - 793$	$a_{10} = 827 \quad a_{16} = 929 \quad a_{22} = 1031$
	<i>I способ</i> $4d = 68 \quad d = 68 : 4 = 17$	$a_{11} = 844 \quad a_{17} = 946 \quad a_{23} = 1048$
<u>Найти:</u>	$a_{25} = a_{12} + 13d$	$a_{12} = 861 \quad a_{18} = 963 \quad a_{24} = 1065$
$a_{25} - ?$	$a_{25} = 861 + 13 \cdot 17$	$a_{13} = 878 \quad a_{19} = 980 \quad a_{25} = 1082$
	$a_{25} = 861 + 221 = 1082$	
<i>II способ</i>	$\begin{cases} 861 = a_1 + 11d \\ 793 = a_1 + 7d \end{cases}$	$a_n = a_1 + d(n-1)$
$a_n = a_1 + d(n-1)$	$\frac{793 = a_1 + 7d}{68 = 4d} \quad 793 = a_1 + 7 \cdot 17$	$a_{25} = a_1 + d \cdot 24$
$\begin{cases} a_{12} = a_1 + d \cdot 11, \\ a_8 = a_1 + d \cdot 7 \end{cases}$	$a_1 = 793 - 119 = 674$	$a_{25} = 674 + 17 \cdot 24$
	$d = 68 : 4 = 17$	$a_{25} = 674 + 408 = 1082$

**Ответ: 1082**

**Задание 5.** К концу 2010 года в городе проживало 59 400 человек. Каждый год число жителей города возрастало на одну и ту же величину. В конце 2018 года в городе проживало 66 040 человек. Какова была численность населения этого города к концу 2014 года?

<u>Дано:</u>	<u>Решение:</u>	<u>Проверка:</u>
$a_{10} = 59\,400$	$a_{18} = a_{10} + 8d$	$a_{10} = 59400 \quad a_{15} = 63550$
$a_{18} = 66\,040$	$66040 = 59400 + 8d$	$a_{11} = 60230 \quad a_{16} = 64380$
	$8d = 66040 - 59400$	$a_{12} = 61060 \quad a_{17} = 65210$
<u>Найти:</u>	$8d = 6640$	$a_{13} = 61890 \quad a_{18} = 66040$
$a_{14} - ?$	<i>I способ</i> $d = 6640 : 8 = 830$	$a_{14} = 62720$
	$a_{14} = a_{10} + 4d$	
	$a_{14} = 59400 + 4 \cdot 830$	
	$a_{14} = 59400 + 3320$	
	$a_{14} = 62720$	
<i>II способ</i>	$\begin{cases} 66040 = a_1 + 17d \\ 59400 = a_1 + 9d \end{cases}$	$a_n = a_1 + d(n-1)$
$a_n = a_1 + d(n-1)$	$\frac{6640 = 8d}{6640 = 8d} \quad 59400 = a_1 + 9 \cdot 830$	$a_{14} = a_1 + d \cdot 13$
$\begin{cases} a_{18} = a_1 + d \cdot 17, \\ a_{10} = a_1 + d \cdot 9 \end{cases}$	$a_1 = 59400 - 7470$	$a_{14} = 5193 + 830 \cdot 13$
	$a_1 = 51930$	$a_{14} = 62720$

**Ответ: 62 720**

**Задание 6.** В 08:00 часы сломались и за каждый следующий час отставали на одно и то же количество минут по сравнению с предыдущим часом. В 18:00 того же дня часы отставали на тридцать минут. На сколько минут отставали часы спустя 16 часов после того, как они сломались?

Дано:

$$a_8 = 0$$

$$a_{18} = 30$$

Найти:

$$a_{8+16} - ?$$

Решение:

$$a_{18} = a_8 + 10d$$

$$30 = 0 + 10d$$

$$10d = 30$$

$$d = 30 : 10 = 3$$

$$a_{8+16} = a_{24} = a_8 + 16d$$

$$a_{24} = 0 + 16 \cdot 3$$

$$a_{24} = 48$$

Проверка:

$a_8 = 0$	$a_{14} = 18$	$a_{20} = 36$
$a_9 = 3$	$a_{15} = 21$	$a_{21} = 39$
$a_{10} = 6$	$a_{16} = 24$	$a_{22} = 42$
$a_{11} = 9$	$a_{17} = 27$	$a_{23} = 45$
$a_{12} = 12$	$a_{18} = 30$	$a_{24} = 48$
$a_{13} = 15$	$a_{19} = 33$	

**Ответ: 48**

**Задание 7.** Улитка ползет от одного дерева до другого. Каждый день она проползает на одно и то же расстояние больше, чем в предыдущий день. Известно, что за первый и последний дни улитка проползла в сумме 4,5 метров. Определите, сколько дней улитка потратила на весь путь, если расстояние между деревьями равно 27 метрам.

Дано:

$$a_1 + a_n = 4,5$$

$$S_n = 27$$

Найти:

$$n - ?$$

Решение:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

$$S_n = \frac{4,5}{2} \cdot n = 27$$

$$n = 27 : \frac{4,5}{2}$$

$$n = \frac{27}{1} \cdot \frac{2}{4,5} = \frac{27}{1} \cdot \frac{4}{9} = 12$$

Проверка:

$$a_1 + a_{12} = 4,5$$

$$a_2 + a_{11} = 4,5$$

$$a_3 + a_{10} = 4,5$$

$$a_4 + a_9 = 4,5$$

$$a_5 + a_8 = 4,5$$

$$a_6 + a_7 = 4,5$$

$$S_{12} = 4,5 \cdot 6 = 27$$

**Ответ: 12**

**Задание 8.** Грузовик перевозит партию щебня массой 119 тонн, ежедневно увеличивая норму перевозки на одно и то же число тонн. Известно, что за первый день было перевезено 5 тонн щебня. Определите, сколько тонн щебня было перевезено на четвертый день, если вся работа была выполнена за 7 дней.

Дано:

$$a_1 = 5$$

$$S_7 = 119$$

Найти:

$$a_4 - ?$$

Решение:

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$$

$$S_7 = \frac{2a_1 + d \cdot 6}{2} \cdot 7$$

$$S_7 = \frac{2 \cdot 5 + 6d}{2} \cdot 7 = 119$$

$$5 + 3d = 119 : 7$$

$$3d = 17 - 5$$

$$d = 12 : 3 = 4$$

$$a_n = a_1 + d(n-1)$$

$$a_4 = 5 + 4 \cdot 3 = 17$$

Проверка:

$$a_1 = 5 \quad a_5 = 21$$

$$a_2 = 9 \quad a_6 = 25$$

$$a_3 = 13 \quad a_7 = 29$$

$$a_4 = 17 \quad S_7 = \frac{(5+29) \cdot 7}{2}$$

$$S_7 = 17 \cdot 7 = 119$$

**Ответ: 17**

**Задание 9.** В соревновании по стрельбе за каждый промах в серии из 25 выстрелов стрелок получал штрафные очки: за первый промах – одно штрафное очко, за каждый последующий – на 0,5 очка больше, чем за предыдущий. Сколько раз попал в цель стрелок, получивший 27 штрафных очков?

Дано:

$$a_1 = 1$$

$$d = 0,5$$

$$S_n = 27$$

$$k = 20 - n$$

Найти:

$$k - ?$$

Решение:

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$$

$$S_n = \frac{2 \cdot 1 + 0,5(n-1)}{2} \cdot n = 27$$

$$(2 + 0,5n - 0,5) \cdot n = 54$$

$$(0,5n + 1,5) \cdot n = 54$$

$$(n + 3) \cdot n = 108$$

$$n^2 + 3n - 108 = 0, n > 0$$

$$D = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-108) = 9 + 432 = 441$$

$$n_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{441}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm 21}{2 \cdot 1}$$

$$n_1 = 9$$

$$n_2 = -12 - \text{не удовл. условию } n > 0$$

$$k = 20 - n = 20 - 9 = 11$$

Проверка:

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 1,5$$

$$a_3 = 2$$

$$a_4 = 2,5$$

$$a_5 = 3$$

$$a_6 = 3,5$$

$$a_7 = 4$$

$$a_8 = 4,5$$

$$a_9 = 5$$

$$S_9 = \frac{(1+5) \cdot 9}{2} = 27$$

$$n = 9$$

$$k = 20 - 9 = 11$$

**Ответ: 11**

**Задание 10.** Врач прописал больному капли по следующей схеме: в первый день 15 капель, а в каждый следующий день – на 5 капель больше, чем в предыдущий, до тех пор, пока дневная доза не достигнет 35 капель. Такую дневную дозу (35 капель) больной ежедневно принимает три дня, а затем уменьшает приём на 5 капель в день до последнего дня, когда больной принимает последние двадцать капель. Сколько пузырьков лекарства нужно купить на весь курс, если в каждом пузырьке 10 мл лекарства (140 капель)?

Дано:

$$\begin{aligned} a_1 &= 15 & a_{n+2} &= 35 \\ d_1 &= 5 & d_2 &= -5 \\ a_n &= 35 & a_{n+2+k} &= 20 \\ a_{n+1} &= 35 & m &= 140 \end{aligned}$$

Найти:

кол-во пузырьков - ?

Решение:

$$\begin{aligned} a_1 &= 15 & a_6 &= 35 \\ a_2 &= 20 & a_7 &= 35 \\ a_3 &= 25 & a_8 &= 30 \\ a_4 &= 30 & a_9 &= 25 \\ a_5 &= 35 & a_{10} &= 20 \end{aligned}$$

$$S_{10} = \frac{(15+35) \cdot 5}{2} + 35 + \frac{(35+20) \cdot 4}{2}$$

$$S_{10} = 125 + 35 + 110 = 270$$

$$S_{10} : m = 270 : 140 = \frac{27}{14} = 1 \frac{13}{14}$$

Следовательно, пузырьков – 2

**Ответ: 2**

**Задание 11.** Каждое простейшее одноклеточное животное инфузория-туфелька размножается делением на 2 части. Сколько инфузорий было первоначально, если после пятикратного деления их стало 1120?

Дано:

$$\begin{aligned} q &= 2 \\ b_5 &= 1120 \end{aligned}$$

Найти:

$b_1$  - ?

Решение:

$$\begin{aligned} b_n &= b_1 \cdot q^{n-1} \\ b_5 &= b_1 \cdot 2^4 = 1120 \\ b_1 &= 1120 : 16 = 70 \end{aligned}$$

Проверка:

$$\begin{aligned} b_1 &= 70 \\ b_2 &= 70 \cdot 2 = 140 \\ b_3 &= 140 \cdot 2 = 280 \\ b_4 &= 280 \cdot 2 = 560 \\ b_5 &= 560 \cdot 2 = 1120 \end{aligned}$$

**Ответ: 70**

**Задание 12.** Митя играет в компьютерную игру. Он начинает с 0 очков, а для перехода на следующий уровень ему нужно набрать не менее 8 000 очков. После первой минуты игры добавляется 2 очка, после второй – 4 очка, после третьей – 8 очков и так далее. Таким образом, после каждой следующей минуты игры количество добавляемых очков удваивается. Через сколько минут Митя перейдет на следующий уровень?

Дано:

$$\begin{aligned} b_1 &= 2 \\ q &= 2 \\ b_n &> 8000 \end{aligned}$$

Найти:

$n$  - ?

Решение:

$$S_n = \frac{(q^n - 1) \cdot b_1}{q - 1} \quad \begin{aligned} 2^n - 1 &> 4000 & 2^{10} &= 1024 \\ 2^n &> 4001 & 2^{11} &= 2048 \end{aligned}$$

$$S_n = \frac{(2^n - 1) \cdot 2}{2 - 1} > 8000 \quad \begin{aligned} 2^{12} &= 4096 \\ n &= 12 \end{aligned}$$

**Ответ: 12**