

20. Алгебраические выражения, уравнения и неравенства

Блок 1. ФИПИ.

Примеры решений

Пример 1.а. Найдите значение выражения $28a - 7b + 13$, если $\frac{2a - 5b + 8}{5a - 2b + 8} = 6$.

$$\frac{2a - 5b + 8}{5a - 2b + 8} = \frac{6}{1}$$

$$6(5a - 2b + 8) = 2a - 5b + 8$$

$$30a - 12b + 48 = 2a - 5b + 8$$

$$30a - 12b + 48 - 2a + 5b - 8 = 0$$

$$28a - 7b + 40 = 0$$

$$28a - 7b = -40$$

$$28a - 7b + 13 = -40 + 13 = -27 \quad \text{Ответ: } -27$$

Пример 1.б. Найдите значение выражения $28a - 7b + 13$, если $\frac{2a - 5b + 8}{5a - 2b + 8} = 6$.

$$\frac{2a - 5b + 8}{5a - 2b + 8} = \frac{6}{1}$$

$$6(5a - 2b + 8) = 2a - 5b + 8$$

$$30a - 12b + 48 = 2a - 5b + 8$$

$$30a - 12b + 48 - 2a + 5b - 8 = 0$$

$$28a - 7b + 40 = 0$$

$$28a = 7b - 40$$

$$28a - 7b + 13 = 7b - 40 - 7b + 13 = -27 \quad \text{Ответ: } -27$$

Пример 2.1. Решите уравнение: $x^3 + 5x^2 - 16x - 80 = 0$.

$$x^3 + 5x^2 - 16x - 80 = 0$$

$$(x^3 + 5x^2) + (-16x - 80) = 0$$

$$x^2(x + 5) - 16(x + 5) = 0$$

$$(x + 5)(x^2 - 16) = 0$$

$$(x + 5)(x - 4)(x + 4) = 0$$

$$x + 5 = 0 \quad \text{или} \quad x - 4 = 0 \quad \text{или} \quad x + 4 = 0$$

$$x = -5 \quad \quad \quad x = 4 \quad \quad \quad x = -4$$

$$\text{Ответ: } -5; -4; 4$$

Пример 2.2. Решите уравнение: $x^3 + 8x^2 = x + 8$.

$$x^3 + 8x^2 = x + 8$$

$$x^2(x + 8) = (x + 8)$$

$$x^2(x + 8) - (x + 8) = 0$$

$$(x + 8)(x^2 - 1) = 0$$

$$(x + 8)(x - 1)(x + 1) = 0$$

$$x + 8 = 0 \quad \text{или} \quad x - 1 = 0 \quad \text{или} \quad x + 1 = 0$$

$$x = -8 \quad \quad \quad x = 1 \quad \quad \quad x = -1$$

Ответ: $-8; -1; 1$.

Пример 2.3.а. Решите уравнение: $x^2 - 2x + \sqrt{7-x} = \sqrt{7-x} + 48$.

$$x^2 - 2x + \sqrt{7-x} = \sqrt{7-x} + 48$$

$$ODЗ: \quad 7 - x \geq 0$$

$$x \leq 7$$

$$x^2 - 2x + \sqrt{7-x} - \sqrt{7-x} - 48 = 0$$

$$x^2 - 2x - 48 = 0$$

$$D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-48) = 4 + 192 = 196$$

$$x_1 = \frac{-(-2) - \sqrt{196}}{2 \cdot 1} = \frac{2 - 14}{2} = \frac{-12}{2} = -6;$$

$$x_2 = \frac{-(-2) + \sqrt{196}}{2 \cdot 1} = \frac{2 + 14}{2} = \frac{16}{2} = 8 - \text{не удовлетворяет } ODЗ$$

Ответ: -6 .

Пример 2.3.б. Решите уравнение: $x^2 - 2x + \sqrt{7-x} = \sqrt{7-x} + 48$.

$$x^2 - 2x + \sqrt{7-x} = \sqrt{7-x} + 48$$

$$x^2 - 2x + \sqrt{7-x} - \sqrt{7-x} - 48 = 0$$

$$x^2 - 2x - 48 = 0 \quad \text{при условии } 7 - x \geq 0, \text{ т.е. при } x \leq 7$$

$$D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-48) = 4 + 192 = 196$$

$$x_1 = \frac{-(-2) - \sqrt{196}}{2 \cdot 1} = \frac{2 - 14}{2} = \frac{-12}{2} = -6;$$

$$x_2 = \frac{-(-2) + \sqrt{196}}{2 \cdot 1} = \frac{2 + 14}{2} = \frac{16}{2} = 8 - \text{посторонний корень, так как } x \leq 7$$

Ответ: -6 .

Пример 2.3.в. Решите уравнение: $x^2 - 2x + \sqrt{7-x} = \sqrt{7-x} + 48$.

$$x^2 - 2x + \sqrt{7-x} = \sqrt{7-x} + 48$$

$$x^2 - 2x + \sqrt{7-x} - \sqrt{7-x} - 48 = 0$$

$$\begin{cases} 7-x \geq 0, \\ x^2 - 2x - 48 = 0 \end{cases}$$

$$D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-48) = 4 + 192 = 196$$

$$x_1 = \frac{-(-2) - \sqrt{196}}{2 \cdot 1} = \frac{2 - 14}{2} = \frac{-12}{2} = -6;$$

$$x_2 = \frac{-(-2) + \sqrt{196}}{2 \cdot 1} = \frac{2 + 14}{2} = \frac{16}{2} = 8$$

не удовлетворяет условию $7-x \geq 0$

Ответ: -6.

Пример 2.4. Решите уравнение: $x(x^2 + 10x + 25) = 14(x + 5)$.

$$x(x^2 + 10x + 25) = 14(x + 5)$$

$$x(x + 5)^2 = 14(x + 5)$$

$$x(x + 5)^2 - 14(x + 5) = 0$$

$$(x + 5)(x(x + 5) - 14) = 0$$

$$(x + 5)(x^2 + 5x - 14) = 0$$

$$x + 5 = 0 \quad \text{или} \quad x^2 + 5x - 14 = 0$$

$$x = -5$$

$$D = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-14) = 25 + 56 = 81$$

$$x_1 = \frac{-5 - \sqrt{81}}{2 \cdot 1} = \frac{-5 - 9}{2} = \frac{-14}{2} = -7; \quad x_2 = \frac{-5 + \sqrt{81}}{2 \cdot 1} = \frac{-5 + 9}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Ответ: -7; -5; 2.

Пример 2.5. Решите уравнение: $(x-3)(x^2 + 14x + 49) = 11(x+7)$.

$$(x-3)(x^2 + 14x + 49) = 11(x+7)$$

$$(x-3)(x+7)^2 = 11(x+7)$$

$$(x-3)(x+7)^2 - 11(x+7) = 0$$

$$(x+7)((x-3)(x+7) - 11) = 0$$

$$(x+7)(x^2 + 7x - 3x - 21 - 11) = 0$$

$$(x+7)(x^2 + 4x - 32) = 0$$

$$x+7 = 0 \quad \text{или} \quad x^2 + 4x - 32 = 0$$

$$x = -7$$

$$D = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-32) = 16 + 128 = 144$$

$$x_1 = \frac{-4 - \sqrt{144}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 - 12}{2} = -8; \quad x_2 = \frac{-4 + \sqrt{144}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 + 12}{2} = 4$$

Ответ: -8; -7; 4.

Пример 2.6.а. Решите уравнение: $(x^2 - 16)^2 + (x^2 + 3x - 28)^2 = 0$.

$$(x^2 - 16)^2 + (x^2 + 3x - 28)^2 = 0$$

$$x^2 + 3x - 28 = (x - x_1)(x - x_2) = (x + 7)(x - 4), \text{ т.к.}$$

$$D = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-28) = 9 + 112 = 121$$

$$x_1 = \frac{-3 - \sqrt{121}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 - 11}{2} = -7$$

$$x_2 = \frac{-3 + \sqrt{121}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 + 11}{2} = 4, \text{ тогда уравнение принимает вид}$$

$$(x - 4)^2 (x + 4)^2 + (x + 7)^2 (x - 4)^2 = 0$$

$$(x - 4)^2 ((x + 4)^2 + (x + 7)^2) = 0$$

$$(x - 4)^2 (x^2 + 8x + 16 + x^2 + 14x + 49) = 0$$

$$(x - 4)^2 (2x^2 + 22x + 65) = 0$$

$$(x - 4)^2 = 0 \quad \text{или} \quad 2x^2 + 22x + 65 = 0$$

$$x - 4 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = 22^2 - 4 \cdot 2 \cdot 65 = 484 - 520 = -36 < 0$$

$$x = 4$$

действительных корней нет

Ответ: 4.

Пример 2.6.б. Решите уравнение: $(x^2 - 16)^2 + (x^2 + 3x - 28)^2 = 0$.

$$(x^2 - 16)^2 + (x^2 + 3x - 28)^2 = 0$$

$(x^2 - 16)^2 \geq 0$ и $(x^2 + 3x - 28)^2 \geq 0$ при любом значении переменной.

Сумма двух неотрицательных слагаемых равна нулю, только если они

оба равны нулю. Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 - 16 = 0 \\ x^2 + 3x - 28 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 16 = 0 \\ x^2 + 3x - 28 = 0 \end{cases}$$

$$x^2 - 16 = 0$$

$$x^2 + 3x - 28 = 0$$

$$(x - 4)(x + 4) = 0$$

$$D = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-28) = 9 + 112 = 121$$

$$x - 4 = 0 \quad \text{или} \quad x + 4 = 0$$

$$x = 4$$

$$x = -4$$

$$x_1 = \frac{-3 - \sqrt{121}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 - 11}{2} = -7;$$

$$x_2 = \frac{-3 + \sqrt{121}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 + 11}{2} = 4$$

$$\begin{cases} x = \pm 4, \\ x = -7, \\ x = 4 \end{cases}$$

Ответ: 4.

Пример 2.7.а. Решите уравнение: $\frac{1}{x^2} + \frac{6}{x} - 40 = 0$.

$$\frac{1}{x^2} + \frac{6}{x} - 40 = 0$$

$$\text{ОДЗ: } x \neq 0$$

1) пусть $\frac{1}{x} = t$, тогда уравнение принимает вид:

$$t^2 + 6t - 40 = 0$$

$$D = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-40) = 36 + 160 = 196$$

$$t_1 = \frac{-6 - \sqrt{196}}{2 \cdot 1} = \frac{-6 - 14}{2} = -10;$$

$$t_2 = \frac{-6 + \sqrt{196}}{2 \cdot 1} = \frac{-6 + 14}{2} = 4$$

2) вернемся к переменной x :

$$\frac{1}{x} = -10 \quad \text{или} \quad \frac{1}{x} = 4$$

$$\frac{1}{x} = -10 \quad | \cdot x \qquad \frac{1}{x} = 4 \quad | \cdot x$$

$$1 = -10x \qquad 1 = 4x$$

$$x = -\frac{1}{10} \qquad x = \frac{1}{4}$$

Ответ: $-\frac{1}{10}; \frac{1}{4}$.

Пример 2.7.б. Решите уравнение: $\frac{1}{x^2} + \frac{6}{x} - 40 = 0$.

$$\frac{1}{x^2} + \frac{6}{x} - 40 = 0$$

$$\text{ОДЗ: } x \neq 0$$

$$\frac{1}{x^2} + \frac{6}{x} - 40 = 0 \quad | \cdot x^2$$

$$1 + 6x - 40x^2 = 0$$

$$-40x^2 + 6x + 1 = 0$$

$$D = 6^2 - 4 \cdot (-40) \cdot 1 = 36 + 160 = 196$$

$$x_1 = \frac{-6 - \sqrt{196}}{2 \cdot (-40)} = \frac{-6 - 14}{-80} = \frac{1}{4};$$

$$x_2 = \frac{-6 + \sqrt{196}}{2 \cdot (-40)} = \frac{-6 + 14}{-80} = -\frac{1}{10}$$

Ответ: $-\frac{1}{10}; \frac{1}{4}$.

Пример 2.7.в. Решите уравнение: $\frac{1}{x^2} + \frac{6}{x} - 40 = 0$.

$$\frac{1}{x^2} + \frac{6}{x} - 40 = 0$$

$$\frac{1 + 6x - 40x^2}{x^2} = 0$$

$$\begin{cases} 1 + 6x - 40x^2 = 0 \\ x^2 \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1/4, \\ x = -1/10, \\ x \neq 0 \end{cases}$$

$$-40x^2 + 6x + 1 = 0$$

$$D = 6^2 - 4 \cdot (-40) \cdot 1 = 36 + 160 = 196$$

$$x_1 = \frac{-6 - \sqrt{196}}{2 \cdot (-40)} = \frac{-6 - 14}{-80} = \frac{1}{4};$$

$$x_2 = \frac{-6 + \sqrt{196}}{2 \cdot (-40)} = \frac{-6 + 14}{-80} = -\frac{1}{10}$$

Ответ: $-\frac{1}{10}; \frac{1}{4}$.

Пример 2.8.а. Решите уравнение: $\frac{1}{(x-3)^2} - \frac{7}{x-3} - 18 = 0$.

$$\frac{1}{(x-3)^2} - \frac{7}{x-3} - 18 = 0$$

1) пусть $x-3=t$, тогда уравнение принимает вид:

$$\frac{1}{t^2} - \frac{7}{t} - 18 = 0$$

ОДЗ: $t \neq 0$

$$\frac{1}{t^2} - \frac{7}{t} - 18 = 0 \quad | \cdot t^2$$

$$1 - 7t - 18t^2 = 0$$

$$-18t^2 - 7t + 1 = 0$$

$$D = (-7)^2 - 4 \cdot (-18) \cdot 1 = 49 + 72 = 121$$

$$t_1 = \frac{-(-7) - \sqrt{121}}{2 \cdot (-18)} = \frac{7 - 11}{-36} = \frac{1}{9};$$

$$t_2 = \frac{-(-7) + \sqrt{121}}{2 \cdot (-18)} = \frac{7 + 11}{-36} = -\frac{1}{2}$$

2) вернемся к переменной x :

$$x-3 = \frac{1}{9} \quad \text{или} \quad x-3 = -\frac{1}{2}$$

$$x = \frac{1}{9} + 3 \quad x = -\frac{1}{2} + 3$$

$$x = 3\frac{1}{9} \quad x = 2\frac{1}{2}$$

Ответ: $2\frac{1}{2}; 3\frac{1}{9}$.

Пример 2.8.б. Решите уравнение: $\frac{1}{(x-3)^2} - \frac{7}{x-3} - 18 = 0$.

$$\frac{1}{(x-3)^2} - \frac{7}{x-3} - 18 = 0 \quad \text{ОДЗ: } x-3 \neq 0, \text{ т.е. } x \neq 3$$

1) пусть $\frac{1}{x-3} = t$, тогда уравнение принимает вид:

$$t^2 - 7t - 18 = 0$$

$$D = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-18) = 49 + 72 = 121$$

$$t_1 = \frac{7 - \sqrt{121}}{2 \cdot 1} = \frac{7 - 11}{2} = -2; \quad t_2 = \frac{7 + \sqrt{121}}{2 \cdot 1} = \frac{7 + 11}{2} = 9$$

2) вернемся к переменной x :

$$\frac{1}{x-3} = -2$$

или $\frac{1}{x-3} = 9$

$$\frac{1}{x-3} = -2 \mid \cdot (x-3)$$

$$\frac{1}{x-3} = 9 \mid \cdot (x-3)$$

$$1 = -2(x-3)$$

$$1 = 9(x-3)$$

$$1 = -2x + 6$$

$$1 = 9x - 27$$

$$2x = 6 - 1$$

$$-9x = -27 - 1$$

$$2x = 5$$

$$-9x = -28$$

$$x = 2\frac{1}{2}$$

$$x = \frac{28}{9} = 3\frac{1}{9}$$

Ответ: $2\frac{1}{2}; 3\frac{1}{9}$

Пример 2.8.в. Решите уравнение: $\frac{1}{(x-3)^2} - \frac{7}{x-3} - 18 = 0$.

$$\frac{1}{(x-3)^2} - \frac{7}{x-3} - 18 = 0$$

$$\frac{1 - 7(x-3) - 18(x-3)^2}{(x-3)^2} = 0$$

$$\begin{cases} 1 - 7(x-3) - 18(x-3)^2 = 0 \\ (x-3)^2 \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 - 7x + 21 - 18x^2 + 108x - 162 = 0 \\ x - 3 \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -18x^2 + 101x - 140 = 0 \\ x - 3 \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3\frac{1}{9}, \\ x = 2\frac{1}{2}, \\ x \neq 3 \end{cases}$$

$$-18x^2 + 101x - 140 = 0$$

$$D = 101^2 - 4 \cdot (-18) \cdot (-140) = 10201 - 10080 = 121$$

$$x_1 = \frac{-101 - \sqrt{121}}{2 \cdot (-18)} = \frac{-101 - 11}{-36} = \frac{112}{36} = \frac{28}{9} = 3\frac{1}{9};$$

$$x_2 = \frac{-101 + \sqrt{121}}{2 \cdot (-18)} = \frac{-101 + 11}{-36} = \frac{90}{36} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$$

Ответ: $2\frac{1}{2}; 3\frac{1}{9}$.

Пример 2.9.а. Решите уравнение: $(x+5)^4 + (x+5)^2 - 12 = 0$.

$$(x+5)^4 + (x+5)^2 - 12 = 0$$

1) пусть $(x+5)^2 = t$, тогда уравнение принимает вид:

$$t^2 + t - 12 = 0$$

$$D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12) = 1 + 48 = 49$$

$$t_1 = \frac{-1 - \sqrt{49}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 - 7}{2} = -4;$$

$$t_2 = \frac{-1 + \sqrt{49}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 + 7}{2} = 3$$

2) вернемся к переменной x :

$$(x+5)^2 = -4$$

действительных корней нет

или $(x+5)^2 = 3$

$$(x+5)^2 - 3 = 0$$

$$(x+5)^2 - (\sqrt{3})^2 = 0$$

$$(x+5 - \sqrt{3})(x+5 + \sqrt{3}) = 0$$

$$x+5 - \sqrt{3} = 0$$

$$x+5 + \sqrt{3} = 0$$

$$x = -5 + \sqrt{3}$$

$$x = -5 - \sqrt{3}$$

Ответ: $-5 - \sqrt{3}; -5 + \sqrt{3}$.

Пример 2.9.б. Решите уравнение: $(x+5)^4 + (x+5)^2 - 12 = 0$.

$$(x+5)^4 + (x+5)^2 - 12 = 0$$

1) пусть $(x+5)^2 = t$ ($t \geq 0$), тогда уравнение принимает вид:

$$t^2 + t - 12 = 0$$

$$D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12) = 1 + 48 = 49$$

$$t_1 = \frac{-1 - \sqrt{49}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 - 7}{2} = -4 - \text{не удовлетворяет условию } t \geq 0$$

$$t_2 = \frac{-1 + \sqrt{49}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 + 7}{2} = 3$$

2) вернемся к переменной x :

$$(x+5)^2 = 3$$

$$x^2 + 10x + 25 - 3 = 0$$

$$x^2 + 10x + 22 = 0$$

$$D = 10^2 - 4 \cdot 1 \cdot 22 = 100 - 88 = 12$$

$$x_1 = \frac{-10 - \sqrt{12}}{2 \cdot 1} = \frac{-10 - 2\sqrt{3}}{2} = -5 - \sqrt{3};$$

$$x_2 = \frac{-10 + \sqrt{12}}{2 \cdot 1} = \frac{-10 + 2\sqrt{3}}{2} = -5 + \sqrt{3}$$

Ответ: $-5 - \sqrt{3}; -5 + \sqrt{3}$.

Пример 2.10. Решите уравнение: $x^4 = (x-42)^2$.

$$x^4 = (x-42)^2$$

$$x^4 - (x-42)^2 = 0$$

$$(x^2 - (x-42))(x^2 + (x-42)) = 0$$

$$(x^2 - x + 42)(x^2 + x - 42) = 0$$

$$x^2 - x + 42 = 0$$

$$D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 42 = -167 < 0$$

действительных корней нет

$$x^2 + x - 42 = 0$$

$$D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-42) = 1 + 168 = 169$$

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{169}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 - 13}{2} = -7;$$

$$x_2 = \frac{-1 + \sqrt{169}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 + 13}{2} = 6$$

Ответ: -7; 6.

Пример 3.1.а. Решите систему уравнений:
$$\begin{cases} 3x^2 - 8x = y, \\ 9x - 24 = y. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x^2 - 8x = y, \\ 9x - 24 = y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x^2 - 8x = y, \\ 9x - 24 = y \end{cases}$$

$$3x^2 - 8x = 9x - 24$$

$$3x^2 - 8x - 9x + 24 = 0$$

$$x(3x - 8) - 3(3x - 8) = 0$$

$$(3x - 8)(x - 3) = 0$$

$$3x - 8 = 0 \quad \text{или} \quad x - 3 = 0$$

$$3x = 8 \quad \quad \quad x = 3$$

$$x = 2\frac{2}{3}$$

$$\begin{cases} x = 2\frac{2}{3}, \\ y = 9x - 24 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = 3, \\ y = 9x - 24 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2\frac{2}{3}, \\ y = 9 \cdot 2\frac{2}{3} - 24 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3, \\ y = 9 \cdot 3 - 24 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2\frac{2}{3}, \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3, \\ y = 3 \end{cases}$$

Ответ: $(2\frac{2}{3}; 0)$; $(3; 3)$.

Пример 3.1.б. Решите систему уравнений:
$$\begin{cases} 3x^2 - 8x = y, \\ 9x - 24 = y. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x^2 - 8x = y, \\ 9x - 24 = y \end{cases}$$

$$3x^2 - 8x = 9x - 24$$

$$3x^2 - 8x - 9x + 24 = 0$$

$$x(3x - 8) - 3(3x - 8) = 0$$

$$(3x - 8)(x - 3) = 0$$

$$3x - 8 = 0 \quad \text{или} \quad x - 3 = 0 \quad y = 9x - 24$$

$$3x = 8 \quad x = 3 \quad 1) \text{ если } x = 2\frac{2}{3}, \text{ то } y = 9 \cdot 2\frac{2}{3} - 24 = 24 - 24 = 0;$$

$$x = 2\frac{2}{3} \quad 2) \text{ если } x = 3, \text{ то } y = 9 \cdot 3 - 24 = 27 - 24 = 3$$

Ответ: $(2\frac{2}{3}; 0); (3; 3)$.

Пример 3.2.а. Решите систему уравнений:
$$\begin{cases} 7x^2 + y = 14, \\ 2x^2 - y = 22. \end{cases}$$

$$+ \begin{cases} 7x^2 + y = 14, \\ 2x^2 - y = 22 \end{cases}$$

$$9x^2 + 0 = 36 \quad | : 9$$

$$x^2 = 4$$

$$x^2 - 4 = 0$$

$$(x - 2)(x + 2) = 0$$

$$x - 2 = 0 \quad \text{или} \quad x + 2 = 0$$

$$x = 2 \quad x = -2$$

$$\begin{cases} x = 2, \\ y = 14 - 7x^2 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = -2, \\ y = 14 - 7x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2, \\ y = 14 - 7 \cdot 2^2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -2, \\ y = 14 - 7 \cdot 2^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2, \\ y = -14 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -2, \\ y = -14 \end{cases}$$

Ответ: $(-2; -14); (2; -14)$.

Пример 3.2.б. Решите систему уравнений:
$$\begin{cases} 7x^2 + y = 14, \\ 2x^2 - y = 22. \end{cases}$$

$$+ \begin{cases} 7x^2 + y = 14, \\ 2x^2 - y = 22 \end{cases}$$

$$9x^2 + 0 = 36 \quad |:9$$

$$x^2 = 4$$

$$x^2 - 4 = 0$$

$$(x-2)(x+2) = 0$$

$$x-2=0 \quad \text{или} \quad x+2=0$$

$$x=2 \qquad \qquad x=-2$$

$$y = 14 - 7x^2$$

1) если $x=2$, то $y = 14 - 7 \cdot 2^2 = 14 - 28 = -14$;

2) если $x=-2$, то $y = 14 - 7 \cdot (-2)^2 = 14 - 28 = -14$

Ответ: $(-2; -14); (2; -14)$.

Пример 3.3.а. Решите систему уравнений:
$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 = 59, \\ 10x^2 + 5y^2 = 59x. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 = 59, \\ 10x^2 + 5y^2 = 59x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 = 59, \\ 5(2x^2 + y^2) = 59x \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2 = 59 - 2 \cdot 5^2, \\ x = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 = 59, \\ 5 \cdot 59 = 59x \quad |:59 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2 = 9, \\ x = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2 = 59 - 2x^2, \\ x = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \pm 3, \\ x = 5 \end{cases}$$

Ответ: $(5; -3); (5; 3)$

Пример 3.3.б. Решите систему уравнений:
$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 = 59, \\ 10x^2 + 5y^2 = 59x. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 = 59, & | \cdot 5 \\ 10x^2 + 5y^2 = 59x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10x^2 + 5y^2 = 295, \\ 10x^2 + 5y^2 = 59x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 59x = 295, \\ y^2 = 59 - 2x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 5, \\ y^2 = 59 - 2x^2 \end{cases}$$

$$\text{при } x = 5 \quad y^2 = 59 - 2 \cdot 5^2$$

$$y^2 = 9$$

$$y = \pm 3$$

Ответ: $(5; -3); (5; 3)$.

Пример 4.1.а. Решите неравенство: $\frac{-21}{(x+6)^2 - 10} \geq 0$.

$$\frac{-21}{(x+6)^2 - 10} \geq 0$$

т.к. $-21 < 0$ и $(x+6)^2 - 10 \neq 0$, то равносильным к данному будет неравенство $(x+6)^2 - 10 < 0$

Рассмотрим функцию $f(x) = (x+6)^2 - 10$.

Нули функции:

$$(x+6)^2 - 10 = 0$$

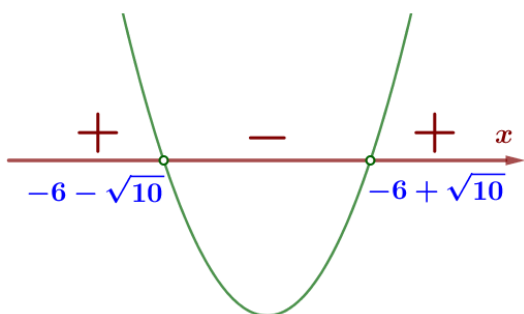
$$(x+6 - \sqrt{10})(x+6 + \sqrt{10}) = 0$$

$$x+6 - \sqrt{10} = 0 \quad \text{или} \quad x+6 + \sqrt{10} = 0$$

$$x_1 = -6 + \sqrt{10} \quad x_2 = -6 - \sqrt{10}$$

Изобразим схематически график функции

$f(x) = (x+6)^2 - 10$ (парабола, $a > 0$ - ветви вверх)



$$f(x) < 0 \quad \text{при } x \in (-6 - \sqrt{10}; -6 + \sqrt{10})$$

Ответ: $(-6 - \sqrt{10}; -6 + \sqrt{10})$.

Пример 4.1.б. Решите неравенство: $\frac{-21}{(x+6)^2-10} \geq 0$.

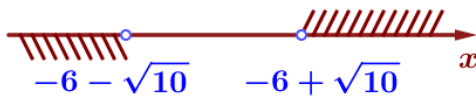
$$\frac{-21}{(x+6)^2-10} \geq 0$$

т.к. $-21 < 0$ и $(x+6)^2-10 \neq 0$, то равносильным к данному будет неравенство $(x+6)^2-10 < 0$

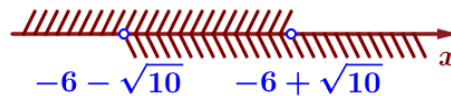
$$(x+6-\sqrt{10})(x+6+\sqrt{10}) < 0$$

$$\begin{cases} x+6-\sqrt{10} > 0, \\ x+6+\sqrt{10} < 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x+6-\sqrt{10} < 0, \\ x+6+\sqrt{10} > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > -6+\sqrt{10}, \\ x < -6-\sqrt{10} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x < -6+\sqrt{10}, \\ x > -6-\sqrt{10} \end{cases}$$



решений нет



$$x \in (-6-\sqrt{10}; -6+\sqrt{10})$$

Решение исходного неравенства: $x \in (-6-\sqrt{10}; -6+\sqrt{10})$

Ответ: $(-6-\sqrt{10}; -6+\sqrt{10})$.

Пример 4.2.а. Решите неравенство: $(x-7)^2 < \sqrt{11}(x-7)$.

$$(x-7)^2 - \sqrt{11}(x-7) < 0$$

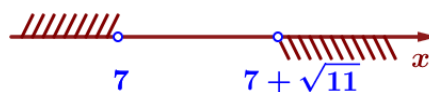
$$(x-7)(x-7-\sqrt{11}) < 0$$

$$\begin{cases} x-7 > 0, \\ x-7-\sqrt{11} < 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x-7 < 0, \\ x-7-\sqrt{11} > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 7, \\ x < 7+\sqrt{11} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x < 7, \\ x > 7+\sqrt{11} \end{cases}$$



$$x \in (7; 7+\sqrt{11})$$



решений нет

Решение исходного неравенства: $x \in (7; 7+\sqrt{11})$

Ответ: $(7; 7+\sqrt{11})$.

Пример 4.2.б. Решите неравенство: $(x-7)^2 < \sqrt{11}(x-7)$.

$$(x-7)^2 - \sqrt{11}(x-7) < 0$$

$$(x-7)(x-7-\sqrt{11}) < 0$$

Рассмотрим функцию $f(x) = (x-7)(x-7-\sqrt{11})$.

Нули функции:

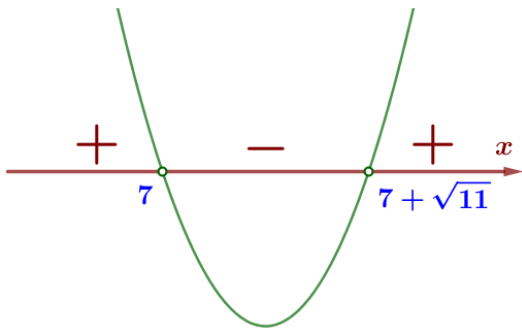
$$(x-7)(x-7-\sqrt{11}) = 0$$

$$x-7=0 \quad \text{или} \quad x-7-\sqrt{11}=0$$

$$x_1=7 \quad \quad \quad x_2=7+\sqrt{11}$$

Изобразим схематически график функции

$f(x) = (x-7)(x-7-\sqrt{11})$ (парабола, $a > 0$ - ветви вверх)



$$f(x) < 0 \quad \text{при} \quad x \in (7; 7+\sqrt{11})$$

Ответ: $(7; 7+\sqrt{11})$.

20. Алгебраические выражения, уравнения и неравенства**Блок 2. ФИПИ. Расширенная версия****Примеры решений**

Пример 1.а. Упростите выражение: $\frac{12^{n+4}}{2^{2n+5} \cdot 3^{n+2}}$.

$$\frac{12^{n+4}}{2^{2n+5} \cdot 3^{n+2}} = \frac{(2^2 \cdot 3)^{n+4}}{2^{2n+5} \cdot 3^{n+2}} = \frac{2^{2n+8} \cdot 3^{n+4}}{2^{2n+5} \cdot 3^{n+2}} = 2^{2n+8-(2n+5)} \cdot 3^{n+4-(n+2)} = 2^3 \cdot 3^2 = 8 \cdot 9 = 72$$

Ответ: 72.

Пример 1.б. Упростите выражение: $\frac{12^{n+4}}{2^{2n+5} \cdot 3^{n+2}}$.

$$\frac{12^{n+4}}{2^{2n+5} \cdot 3^{n+2}} = \frac{(2^2 \cdot 3)^{n+4}}{2^{2n+5} \cdot 3^{n+2}} = \frac{2^{2n+8} \cdot 3^{n+4}}{2^{2n+5} \cdot 3^{n+2}} = \frac{2^{2n} \cdot 2^8 \cdot 3^n \cdot 3^4}{2^{2n} \cdot 2^5 \cdot 3^n \cdot 3^2} = \frac{2^8 \cdot 3^4}{2^5 \cdot 3^2} = 2^{8-5} \cdot 3^{4-2} = 2^3 \cdot 3^2 = 8 \cdot 9 = 72$$

Ответ: 72.

Пример 2.1. Решите уравнение: $(4x-9)^2(x-3) = (4x-9)(x-3)^2$.

$$\begin{aligned} (4x-9)^2(x-3) &= (4x-9)(x-3)^2 \\ (4x-9)^2(x-3) - (4x-9)(x-3)^2 &= 0 \\ (4x-9)(x-3)(4x-9-(x-3)) &= 0 \\ (4x-9)(x-3)(3x-6) &= 0 \\ 4x-9=0 \quad \text{или} \quad x-3=0 \quad \text{или} \quad 3x-6=0 \\ 4x=9 & \quad x=3 & \quad 3x=6 \\ x=2,25 & & x=2 \end{aligned}$$

Ответ: 2; 2,25; 3.

Пример 2.2. Решите уравнение: $(x-1)(x+7)(x-8) = (x-1)(x-8)(x+11)$.

$$\begin{aligned} (x-1)(x+7)(x-8) &= (x-1)(x-8)(x+11) \\ (x-1)(x+7)(x-8) - (x-1)(x-8)(x+11) &= 0 \\ (x-1)(x-8)(x+7-(x+11)) &= 0 \\ (x-1)(x-8)(x+7-x-11) &= 0 \\ (x-1)(x-8)(-4) &= 0 \\ x-1=0 \quad \text{или} \quad x-8=0 \\ x=1 & \quad x=8 \end{aligned}$$

Ответ: 1; 8

Пример 2.3. Решите уравнение: $(x+3)^3 = 9(x+3)$.

$$(x+3)^3 = 9(x+3)$$

$$(x+3)^3 - 9(x+3) = 0$$

$$(x+3)((x+3)^2 - 9) = 0$$

$$(x+3)(x^2 + 6x + 9 - 9) = 0$$

$$(x+3)(x^2 + 6x) = 0$$

$$(x+3)x(x+6) = 0$$

$$x+3=0 \quad \text{или} \quad x=0 \quad \text{или} \quad x+6=0$$

$$x = -3$$

$$x = -6$$

Ответ: $-6; -3; 0$.

Пример 2.4. Решите уравнение: $4x^2 - 7x + 13 = (x+3)^2$.

$$4x^2 - 7x + 13 = (x+3)^2$$

$$4x^2 - 7x + 13 = x^2 + 6x + 9$$

$$4x^2 - 7x + 13 - x^2 - 6x - 9 = 0$$

$$3x^2 - 13x + 4 = 0$$

$$D = 13^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4 = 169 - 48 = 121$$

$$x_1 = \frac{13 - \sqrt{121}}{2 \cdot 3} = \frac{13 - 11}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3};$$

$$x_2 = \frac{13 + \sqrt{121}}{2 \cdot 3} = \frac{13 + 11}{6} = \frac{24}{6} = 4$$

Ответ: $\frac{1}{3}; 4$.

Пример 2.5. Решите уравнение: $x^6 = (11x - 18)^3$.

$$x^6 = (11x - 18)^3$$

$$(x^2)^3 = (11x - 18)^3$$

$$x^2 = 11x - 18$$

$$x^2 - 11x + 18 = 0$$

$$D = (-11)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 18 = 121 - 72 = 49$$

$$x_1 = \frac{11 - \sqrt{49}}{2 \cdot 1} = \frac{11 - 7}{2} = 2;$$

$$x_2 = \frac{11 + \sqrt{49}}{2 \cdot 1} = \frac{11 + 7}{2} = 9$$

Ответ: $2; 9$.

Пример 2.6. Решите уравнение: $x^3 = 4x^2 + 21x$.

$$x^3 = 4x^2 + 21x$$

$$x^3 - 4x^2 - 21x = 0$$

$$x(x^2 - 4x - 21) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{или} \quad x^2 - 4x - 21 = 0$$

$$D = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-21) = 16 + 84 = 100$$

$$x_1 = \frac{-(-4) - \sqrt{100}}{2 \cdot 1} = \frac{4 - 10}{2} = -3;$$

$$x_2 = \frac{-(-4) + \sqrt{100}}{2 \cdot 1} = \frac{4 + 10}{2} = 7$$

Ответ: -3; 0; 7.

Пример 2.7. Решите уравнение: $(x-5)^2(x-2) = 4(x-5)$.

$$(x-5)^2(x-2) = 4(x-5)$$

$$(x-5)^2(x-2) - 4(x-5) = 0$$

$$(x-5)((x-5)(x-2) - 4) = 0$$

$$(x-5)(x^2 - 5x - 2x + 10 - 4) = 0$$

$$(x-5)(x^2 - 7x + 6) = 0$$

$$x - 5 = 0 \quad \text{или} \quad x^2 - 7x + 6 = 0$$

$$x = 5$$

$$D = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 49 - 24 = 25$$

$$x_1 = \frac{7 - \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \frac{7 - 5}{2} = 1; \quad x_2 = \frac{7 + \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \frac{7 + 5}{2} = 6$$

Ответ: 1; 5; 6.

Пример 3. Сократите дробь: $\frac{p(a)}{p\left(\frac{1}{a}\right)}$, если $p(x) = \left(x + \frac{6}{x}\right)\left(6x + \frac{1}{x}\right)$.

$$\frac{p(a)}{p\left(\frac{1}{a}\right)} = \frac{\left(a + \frac{6}{a}\right)\left(6a + \frac{1}{a}\right)}{\left(\frac{1}{a} + \frac{6}{1/a}\right)\left(6 \cdot \frac{1}{a} + \frac{1}{1/a}\right)} = \frac{\left(a + \frac{6}{a}\right)\left(6a + \frac{1}{a}\right)}{\left(\frac{1}{a} + 6a\right)\left(\frac{6}{a} + a\right)} = 1$$

Ответ: 1.

Пример 4. Сократите дробь: $\frac{p(a)}{p(18-a)}$, если $p(x) = \frac{x(18-x)}{x-9}$.

$$\begin{aligned} \frac{p(a)}{p(18-a)} &= p(a) : p(18-a) = \frac{a(18-a)}{a-9} : \frac{(18-a)(18-(18-a))}{(18-a)-9} = \\ &= \frac{a(18-a)}{a-9} \cdot \frac{9-a}{(18-a)a} = -1 \end{aligned}$$

Ответ: -1.

Пример 5.1. Решите систему уравнений:
$$\begin{cases} (3x+7y)^2 = 10y, \\ (3x+7y)^2 = 10x. \end{cases}$$

$$\begin{cases} (3x+7y)^2 = 10y, \\ (3x+7y)^2 = 10x \end{cases}$$

$$10x = 10y \quad |:10$$

$$x = y$$

$$(3y+7y)^2 = 10y$$

$$100y^2 - 10y = 0$$

$$10y(10y-1) = 0$$

$$y = 0 \quad \text{или} \quad 10y-1=0$$

$$y = 0,1$$

$$x = y$$

$$1) \text{ если } y = 0, \quad \text{то } x = 0;$$

$$2) \text{ если } y = 0,1, \quad \text{то } x = 0,1$$

Ответ: $(0; 0); (0,1; 0,1)$.

Пример 5.2. Решите систему уравнений:
$$\begin{cases} y-2x=2, \\ x^2+2xy-y^2=8. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y-2x=2, \\ x^2+2xy-y^2=8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=2+2x, \\ \end{cases}$$

$$x^2+2x(2+2x)-(2+2x)^2=8$$

$$x^2+4x+4x^2-(4+8x+4x^2)=8$$

$$x^2+4x+4x^2-4-8x-4x^2-8=0$$

$$x^2-4x-12=0$$

$$x^2-4x+4-16=0$$

$$(x-2)^2-16=0$$

$$(x-2-4)(x-2+4)=0$$

$$(x-6)(x+2)=0$$

$$x-6=0 \quad \text{или} \quad x+2=0$$

$$x=6 \quad \quad \quad x=-2$$

$$1) \text{ если } x=-2, \quad \text{то } y=2+2x=2+2 \cdot (-2)=-2;$$

$$2) \text{ если } x=6, \quad \text{то } y=2+2x=2+2 \cdot 6=14$$

Ответ: $(-2; -2); (6; 14)$.

Пример 5.3.а. Решите систему уравнений: $\begin{cases} x^2 + y = 7, \\ 2x^2 - y = 20. \end{cases}$

$$+ \begin{cases} x^2 + y = 7, \\ 2x^2 - y = 20 \end{cases}$$

$$3x^2 = 27 \quad |:3$$

$$x^2 = 9$$

$$x^2 - 9 = 0$$

$$(x-3)(x+3) = 0$$

$$x-3=0 \quad \text{или} \quad x+3=0$$

$$x=3 \quad \quad \quad x=-3$$

1) если $x=3$, то $y=7-x^2=7-3^2=7-9=-2$;

2) если $x=-3$, то $y=7-x^2=7-(-3)^2=7-9=-2$

Ответ: $(-3; -2); (3; -2)$.

Пример 5.3.б. Решите систему уравнений: $\begin{cases} x^2 + y = 7, \\ 2x^2 - y = 20. \end{cases}$

$$\begin{cases} x^2 + y = 7, \\ 2x^2 - y = 20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 7 - x^2, \\ 2x^2 - y = 20 \end{cases}$$

$$2x^2 - (7 - x^2) = 20$$

$$2x^2 - 7 + x^2 = 20$$

$$3x^2 = 27 \quad |:3$$

$$x^2 = 9$$

$$x = \pm 3$$

$$\begin{cases} x = 3, \\ y = 7 - x^2 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = -3, \\ y = 7 - x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3, \\ y = 7 - 3^2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -3, \\ y = 7 - (-3)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3, \\ y = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -3, \\ y = -2 \end{cases}$$

Ответ: $(-3; -2); (3; -2)$.

Пример 5.4. Решите систему уравнений:
$$\begin{cases} x - 3y = 7, \\ \frac{x}{5} + \frac{y+4}{4} = -1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 3y = 7, \\ \frac{x}{5} + \frac{y+4}{4} = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 7 + 3y, \\ \frac{7 + 3y}{5} + \frac{y+4}{4} = -1 \end{cases}$$

$$\frac{7 + 3y^{(4)}}{5} + \frac{y+4^{(5)}}{4} = \frac{-1^{(20)}}{1}$$

$$\frac{28 + 12y}{20} + \frac{5y + 20}{20} = \frac{-20}{20} \quad | \cdot 20$$

$$28 + 12y + 5y + 20 = -20$$

$$17y = -20 - 20 - 28$$

$$17y = -68$$

$$y = -68 : 17$$

$$y = -4$$

$$\text{при } y = -4 \quad x = 7 + 3 \cdot (-4) = 7 - 12 = -5$$

Ответ: $(-5; -4)$.

Пример 5.5. Решите систему уравнений:
$$\begin{cases} (x-5)(y-8) = 0, \\ \frac{y-6}{x+y-11} = 4. \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-5)(y-8) = 0, * \\ \frac{y-6}{x+y-11} = 4 \end{cases}$$

$$*(x-5)(y-8) = 0$$

$$x-5=0 \quad \text{или} \quad y-8=0$$

$$x=5 \quad \quad \quad y=8$$

$$1) \text{ если } x=5, \text{ то } \frac{y-6}{5+y-11} = 4$$

$$\frac{y-6}{y-6} = 4$$

корней нет

$$2) \text{ если } y=8, \text{ то } \frac{8-6}{x+8-11} = 4$$

$$\frac{2}{x-3} = 4$$

$$x-3 = \frac{2}{4}$$

$$x = 3 + \frac{1}{2} = 3\frac{1}{2}$$

Ответ: $(3\frac{1}{2}; 8)$.

Пример 5.6. Решите систему уравнений: $\begin{cases} x^2 = 7y - 3, \\ x^2 + 19 = 7y + y^2. \end{cases}$

$$\begin{cases} x^2 = 7y - 3, \\ x^2 + 19 = 7y + y^2 \end{cases}$$

$$7y - 3 + 19 = 7y + y^2$$

$$7y - 3 + 19 - 7y - y^2 = 0$$

$$16 - y^2 = 0$$

$$(4 - y)(4 + y) = 0$$

$$4 - y = 0 \quad \text{или} \quad 4 + y = 0$$

$$y = 4$$

$$y = -4$$

1) если $y = 4$, то

$$x^2 = 7 \cdot 4 - 3$$

$$x^2 = 25$$

$$x^2 - 25 = 0$$

$$(x - 5)(x + 5) = 0$$

$$x - 5 = 0 \quad x + 5 = 0$$

$$x = 5$$

$$x = -5$$

2) если $y = -4$, то

$$x^2 = 7 \cdot (-4) - 3$$

$$x^2 = -31$$

корней нет

Ответ: $(-5; 4); (5; 4)$.

Пример 6.1. Решите неравенство: $(4x + 1)(x - 2) > -5$.

$$(4x + 1)(x - 2) > -5$$

$$4x^2 - 8x + x - 2 + 5 > 0$$

$$4x^2 - 7x + 3 > 0$$

Рассмотрим функцию $f(x) = 4x^2 - 7x + 3$.

Нули функции:

$$4x^2 - 7x + 3 = 0$$

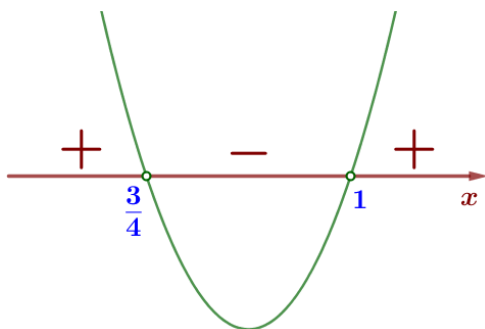
$$D = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 3 = 49 - 48 = 1$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{7 - \sqrt{1}}{2 \cdot 4} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4};$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{7 + \sqrt{1}}{2 \cdot 4} = \frac{8}{8} = 1$$

Изобразим схематически график функции

$f(x) = 4x^2 - 7x + 3$ (парабола, $a > 0$ - ветви вверх):



$$f(x) > 0 \quad \text{при} \quad x \in \left(-\infty; \frac{3}{4}\right) \cup (1; +\infty)$$

$$\text{Ответ: } \left(-\infty; \frac{3}{4}\right) \cup (1; +\infty).$$

Пример 6.2. Решите неравенство: $(x-6)^2 \geq (6x-1)^2$.

$$(x-6)^2 \geq (6x-1)^2$$

$$(x-6)^2 - (6x-1)^2 \geq 0$$

$$(x^2 - 12x + 36) - (36x^2 - 12x + 1) \geq 0$$

$$x^2 - 12x + 36 - 36x^2 + 12x - 1 \geq 0$$

$$-35x^2 + 35 \geq 0 \quad | :(-35)$$

$$x^2 - 1 \leq 0$$

Рассмотрим функцию $f(x) = x^2 - 1$.

Нули функции:

$$x^2 - 1 = 0$$

$$(x-1)(x+1) = 0$$

$$x-1 = 0 \quad \text{или} \quad x+1 = 0$$

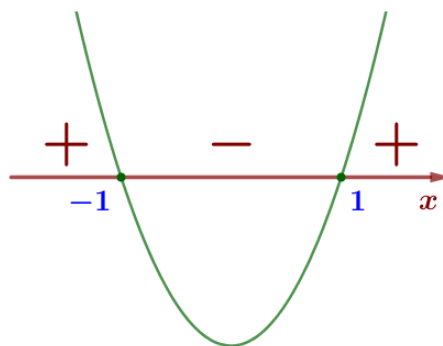
$$x = 1 \quad \quad \quad x = -1$$

Ответ: $[-1; 1]$.

Изобразим схематически график

функции $f(x) = x^2 - 1$

(парабола, $a > 0$ - ветви вверх):



$f(x) \leq 0$ при $x \in [-1; 1]$

Пример 6.3. Решите неравенство: $x^2(-x^2-16) \leq 100(-x^2-16)$.

$$x^2(-x^2-16) \leq 100(-x^2-16)$$

$$(-x^2-16) < 0$$

$$x^2(-x^2-16) \leq 100(-x^2-16) \quad | :(-x^2-16)$$

$$x^2 \geq 100$$

$$x^2 - 100 \geq 0$$

Рассмотрим функцию

$$f(x) = x^2 - 100.$$

Нули функции:

$$x^2 - 100 = 0$$

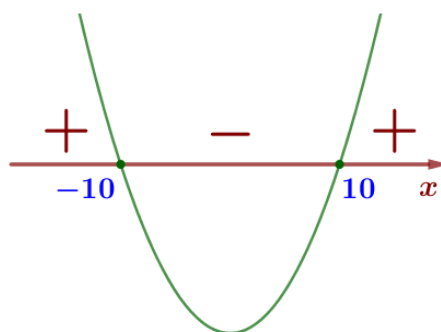
$$(x-10)(x+10) = 0$$

$$x-10 = 0 \quad \text{или} \quad x+10 = 0$$

$$x = 10 \quad \quad \quad x = -10$$

Изобразим схематически график функции

$f(x) = x^2 - 100$ (парабола, $a > 0$ - ветви вверх):



$f(x) \geq 0$ при $x \in (-\infty; -10] \cup [10; +\infty)$

Ответ: $(-\infty; -10] \cup [10; +\infty)$.

Пример 6.4. Решите неравенство: $\frac{-17}{x^2+2x-3} \leq 0$.

$$\frac{-17}{x^2+2x-3} \leq 0, \text{ т.к. } -17 < 0 \text{ и } x^2+2x-3 \neq 0, \text{ то}$$

равносильным к данному будет неравенство $x^2+2x-3 > 0$

Рассмотрим функцию

$$f(x) = x^2 + 2x - 3.$$

Нули функции:

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16$$

$$x_1 = \frac{-2 - \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 - 4}{2} = -3;$$

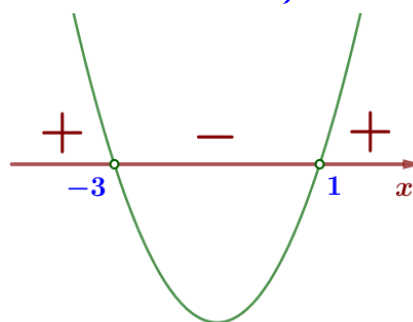
$$x_2 = \frac{-2 + \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 + 4}{2} = 1$$

Ответ: $(-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$.

Изобразим схематически график функции

$$f(x) = x^2 + 2x - 3$$

(парабола, $a > 0$ - ветви вверх):



$f(x) > 0$ при $x \in (-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$

Пример 6.5. Решите неравенство: $\frac{x^2}{4} < \frac{4x-5}{3}$.

$$\frac{x^2}{4} < \frac{4x-5}{3}$$

$$\frac{3x^2}{12} < \frac{16x-20}{12} \quad | \cdot 12$$

$$3x^2 < 16x - 20$$

$$3x^2 - 16x + 20 < 0$$

Рассмотрим функцию

$$f(x) = 3x^2 - 16x + 20.$$

Нули функции:

$$3x^2 - 16x + 20 = 0$$

$$D = (-16)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 20 = 256 - 240 = 16$$

$$x_1 = \frac{-(-16) - \sqrt{16}}{2 \cdot 3} = \frac{16 - 4}{6} = \frac{12}{6} = 2;$$

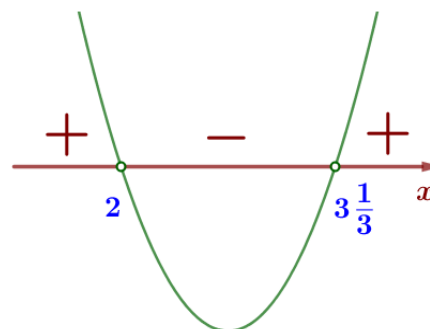
$$x_2 = \frac{-(-16) + \sqrt{16}}{2 \cdot 3} = \frac{16 + 4}{6} = \frac{20}{6} = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$$

Ответ: $(2; 3\frac{1}{3})$.

Изобразим схематически график

$$\text{функции } f(x) = 3x^2 - 16x + 20$$

(парабола, $a > 0$ - ветви вверх):

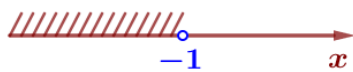


$f(x) < 0$ при $x \in (2; 3\frac{1}{3})$

Пример 7.1.а. Решите систему неравенств: $\begin{cases} 2(3x+5) - 7(2x+3) > 3x, \\ (x-4)(x+7) < 0. \end{cases}$

$$\begin{cases} 2(3x+5) - 7(2x+3) > 3x, * \\ (x-4)(x+7) < 0 ** \end{cases}$$

$$\begin{aligned} *2(3x+5) - 7(2x+3) > 3x \\ 6x+10 - 14x - 21 - 3x > 0 \\ -11x - 11 > 0 \\ -11x > 11 \quad | :(-11) \\ x < -1 \end{aligned}$$



$$x \in (-\infty; -1)$$

$Рассмотрим функцию $f(x) = (x-4)(x+7)$.$

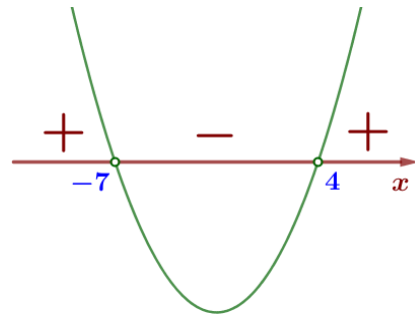
Нули функции:

$$\begin{aligned} (x-4)(x+7) &= 0 \\ x-4=0 \quad x+7=0 \\ x=4 \quad \quad x=-7 \end{aligned}$$

Изобразим схематически график функции

$$f(x) = (x-4)(x+7)$$

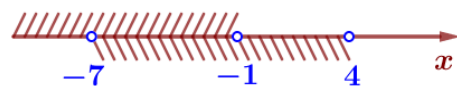
(парабола, $a > 0$ - ветви вверх):



$$f(x) < 0 \text{ при } x \in (-7; 4)$$

Вернемся к системе:

$$\begin{cases} x \in (-\infty; -1), \\ x \in (-7; 4) \end{cases}$$



$$x \in (-7; -1)$$

Ответ: $(-7; -1)$.

Пример 7.1.б. Решите систему неравенств: $\begin{cases} 2(3x+5)-7(2x+3) > 3x, \\ (x-4)(x+7) < 0. \end{cases}$

$$\begin{cases} 2(3x+5)-7(2x+3) > 3x, * \\ (x-4)(x+7) < 0 ** \end{cases}$$

$$\begin{aligned} *2(3x+5)-7(2x+3) > 3x \\ 6x+10-14x-21-3x > 0 \\ -11x-11 > 0 \\ -11x > 11 \quad | :(-11) \\ x < -1 \end{aligned}$$



$$x \in (-\infty; -1)$$

$$$\begin{cases} x-4 > 0, \\ x+7 < 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x-4 < 0, \\ x+7 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 4, \\ x < -7 \end{cases} \quad \begin{cases} x < 4, \\ x > -7 \end{cases}$$$



решений нет

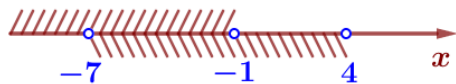


$$x \in (-7; 4)$$

Решение исходного неравенства: $x \in (-7; 4)$

Вернемся к системе:

$$\begin{cases} x \in (-\infty; -1), \\ x \in (-7; 4) \end{cases}$$



$$x \in (-7; -1)$$

Ответ: $(-7; -1)$.

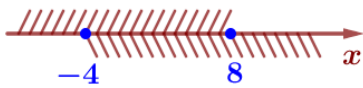
Пример 7.2. Решите систему неравенств:
$$\begin{cases} \frac{8-x}{4+(1-5x)^2} \geq 0, \\ 3-7x \leq 23-2x. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{8-x}{4+(1-5x)^2} \geq 0, \\ 3-7x \leq 23-2x \end{cases}$$

т.к. $4+(1-5x)^2 > 0$, то получаем

равносильную систему:

$$\begin{cases} 8-x \geq 0, \\ -7x+2x \leq 23-3 \\ -x \geq -8, & | :(-1) \\ -5x \leq 20 & | :(-5) \\ x \leq 8, \\ x \geq -4 \end{cases}$$



$$x \in [-4; 8]$$

Ответ: $[-4; 8]$.

20. Алгебраические выражения, уравнения и неравенства Блок 3. ФИПИ. Типовые экзаменационные варианты

Примеры решений

Пример 1. Решите уравнение $x^6 = -(3-4x)^3$.

$$x^6 = -(3-4x)^3$$

$$(x^2)^3 = -(3-4x)^3$$

$$x^2 = -(3-4x)$$

$$x^2 = -3+4x$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{4 - \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{4 - 2}{2} = 1;$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{4 + \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{4 + 2}{2} = 3$$

Ответ: 1; 3.

Пример 2. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 82, \\ xy = 9. \end{cases}$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 82, \\ xy = 9 \end{cases}$$

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$$

$$(x + y)^2 = 82 + 2 \cdot 9$$

$$(x + y)^2 = 100$$

$$x + y = 10 \quad \text{или} \quad x + y = -10$$

Составим и решим две системы:

$$1) \begin{cases} x + y = 10, \\ xy = 9 \end{cases}$$

$$y = 10 - x$$

$$x(10 - x) = 9$$

$$10x - x^2 = 9$$

$$x^2 - 10x + 9 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$D = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 100 - 36 = 64$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{10 - \sqrt{64}}{2 \cdot 1} = \frac{10 - 8}{2} = 1;$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{10 + \sqrt{64}}{2 \cdot 1} = \frac{10 + 8}{2} = 9$$

a) при $x = 1$

$$y = 10 - x = 10 - 1 = 9;$$

б) при $x = 9$

$$y = 10 - x = 10 - 9 = 1$$

$$2) \begin{cases} x + y = -10, \\ xy = 9 \end{cases}$$

$$y = -10 - x$$

$$x(-10 - x) = 9$$

$$-10x - x^2 = 9$$

$$x^2 + 10x + 9 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$D = 10^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 100 - 36 = 64$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-10 - \sqrt{64}}{2 \cdot 1} = \frac{-10 - 8}{2} = -9;$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-10 + \sqrt{64}}{2 \cdot 1} = \frac{-10 + 8}{2} = -1$$

б) при $x = -9$

$$y = -10 - x = -10 + 9 = -1;$$

в) при $x = -1$

$$y = -10 - x = -10 + 1 = -9$$

Ответ: $(-9; -1); (-1; -9); (1; 9); (9; 1)$.